

VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 28 January 1985 No. 1

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

विषय-सूची

1.	विभिन्न युगों में भारतीय वन	डॉ० दिव्य दर्शन पन्त	1
2.	जैकोबी श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता	के० पी० पाण्डेय, बी० एन० त्रिपाठी तथा एल० एम० त्रिपाठी	7
3.	लेगेण्ड्र श्रेणी की एकसमान त्रिभुजी मैट्रिक्स संकलनीयता	एल० एम० त्रिपाठी तथा एस० लाल	17
4.	चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में आयताकार विस्कासी प्रत्यास्थ प्लेट का दोलन	बी० के० जोशी	27
5.	सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में पंचसंयोजक वैनेडियम द्वारा α-ऐमीनो अम्ल के आक्सीकरण का अणुगतिक अध्ययन	प्रेम शंकर तिवारी तथा वी० के० शर्मा	31
6.	दलहन एवं तिलहन के तेल तथा वसीय अम्लों का तुलनात्मक पौष्टिक विश्लेषण	चन्द्र प्रकाश अवस्थी	37
7.	H-फलन वाले कतिपय द्विगुण समाकल	अशोक कुमार रोंघे	41
8.	क्लोरेमीन-टी द्वारा मेथिल ऐमीन के उपचयन की अणुगतिकी तथा क्रियापथ	एस० एन० कक्कड़ तथा एम० एस० वर्मा	47
9.	विस्तीर्ण हुकेल सिद्धान्त के द्वारा परमैंगनेट आयन के आणुक कक्षक की परिगणना	आर० के० सिंह, सुषमा रानी तथा सीताराम त्रिपाठी	53
10.	नार्लुण्ड माध्यों के द्वारा सन्निकटन कोटि-I	आर० बी० सक्सेना	59
11.	परम्परागत तथा परिवर्द्धित बहुचर H-फलनों के गुणनफल को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाला व्यापकीकृत समाकल रूपान्तर	वाई० एन० प्रसाद तथा एम० भार्गव	67
12.	हाइपरज्यामितीय फलनों से सम्बद्ध बहु-विमीय भिन्नात्मक समाकलन आपरेटर-II	आर० के० सक्सेना तथा जी० सी० मोदी	87
13.	किसी व्यापक अबीजीय फलन का उपगामी प्रसार	जी० पी० गौतम तथा ए० एन० गोयल	99

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 28, No. 1, 1985

विभिन्न युगों में भारतीय वन*

डॉ० दिव्य दर्शन पन्त
अवकाशप्राप्त अध्यक्ष, वनस्पति विभाग
इलाहाबाद विश्वविद्यालय

आज हम भारत में वनों को जिस रूप में देख रहे हैं उससे हम में से कुछ यह सोच सकते हैं कि वन अनन्त काल से अपने उसी मूल रूप में आज भी विद्यमान हैं। इसमें संदेह नहीं कि वे उसी तरह से आज भी दिख रहे हैं जिस प्रकार वे इस धरती पर मानव आविर्भाव के समय थे किन्तु उस क्षेत्र के पादप जीवाश्मों से पता चलता है कि वे आज से 70 मिलियन वर्ष पूर्व अपने वर्तमान स्वरूप से बहुत भिन्न थे और 350 मिलियन वर्ष पूर्व निम्न कार्बोनिफेरस काल से लेकर अब तक आदि भारतीय वनों में अनेक प्रकार के परिवर्तन होते आये हैं। इसके पूर्व स्पिति घाटी और कश्मीर से उच्च डेवोनियन काल के मात्र थोड़े से स्थलपादपों के अवशेषों की सूचना मिली है।

ये अवशेष जो टीनिओक्रैडा (Taeniocrada), प्रोटोलेपिडोडेन्ड्रॉन (Protolepidodendron) और होस्टिमेला (Hostimella) से मिलते-जुलते हैं उनमें संवहनी, पर्णरंध्र (Stoma) और क्यूटिन की पर्त वाले स्पोर नहीं पाये जाते। यदि ये स्थलपादप के अवशेष हैं तो इनके पुरोगामी स्थलपादपों के जल वाले स्थानों के निकट जंगल की तरह उग आये होंगे। लगभग उसी समय, उच्च डेवोनियन में आर्कीऑप्टेरिस (Archaeopteris) और दूसरे पूर्व अनावृतबीजियों के वृक्षों के वन कनाडा और सोवियत रूस जैसे अन्य देशों में लहलहा रहे थे। इन वृक्षों के तनों की मोटाई 5 फीट और ऊँचाई 150 फीट से भी अधिक थी किन्तु इनके स्पोरों के अंकुरण और निषेचन की क्रिया के लिये इन्हें अपने आस-पास काफी जल की आवश्यकता थी।

आदि वन

ऐसा अनुभव है कि भारत के आदि वनों का उदय परवर्ती निम्न कार्बोनिफेरस काल में हुआ और ये स्पिति घाटी और कश्मीर में उगते थे। इस समय इन क्षेत्रों में संभवतः नम दलदल थे जो आर्कीयोसिजिलैरिया (Archaeosigillaria), लेपिडोसिजिलैरिया (Lepidosigillaria), लेपिडो-डेन्ड्राप्सिस (Lepidodendropsis), और साइक्लोस्टिग्मा (Cyclostigma) जैसे छोटे लाइकाप्सिड वृक्षों से आच्छादित हो गये। इन पादपों के साथ कुछ फर्न जैसे पौधे उग रहे थे जो रैकाप्टेरिस (Rhacopteris), ट्राइफिलॉप्टेरिस (Triphylopteris), रोडिया (Rhodea) और पामैटोप्टेरिस (Palmatopteris) थे। इन वनों के वृक्षों के तनों की मोटाई 1 फुट से भी कम होती है और लम्बाई शायद ही कभी 15 फीट से अधिक हो।

---

* 72वें साइंस कांग्रेस अधिवेशन, लखनऊ के अवसर पर विज्ञान अनुसंधान गोष्ठी के समक्ष दिया गया अध्यक्ष पदीय भाषण।

कार्बो-परमियन वन

बाद में उच्च कार्बोनिफेरस और प्रारम्भिक परमियन कालों (कार्बो-परमियन) में लगभग पूराभारतीय क्षेत्र हिमाच्छादित हो गया। इस तथाकथित पैलियोजोइक हिमाच्छादन का कारण विश्व द्वाराअनुभव किया जाने वाला सब से महान हिमयुग माना जाता है। इस हिमाच्छादन के विषय में कुछ समझने के लिये हमें वेगनर के उस महाद्वीपीय विचलन के सिद्धान्त के संदर्भ में सोचना पड़ेगा जिसे जीवाश्म पादपों के आधार के अतिरिक्त पिछले वर्षों में जीवाश्म-चुम्बकत्व, समुद्र विज्ञान, महाद्वीपों की बाह्य रेखाओं का कमप्यूटर द्वारा मिलान और ज्वालामुखी तथा भूकम्प वाले क्षेत्रों के अध्ययन से बल मिला है। इस सिद्धान्त के अनुसार कार्बोपरमियन काल में न केवल अंटार्कटिक वरन् आस्ट्रेलिया, भारत, दक्षिणी अफ्रीका और दक्षिणी अमेरिका एक विशाल दक्षिण ध्रुवीय स्थल क्षेत्र से जुड़े हुये थे जिसे मध्य प्रदेश की गोंड आदिवासी जाति के आधार पर गोंडवानालैण्ड नाम दिया गया। गोंडवानालैण्ड के सभी भागों में 'स्क्रैच्ड बोल्डर बेड' का पाया जाना हिमाच्छादन का प्रमाण है जो मिश्र पिण्डाश्म और 'स्क्रैचड-पेबिल्स' के रूप में टिलाइट्स (tillites) के एकत्र हो जाने से बनता है। हिमाच्छादन का शिखर से नीचे तक अध्ययन करने से पता चलता है कि प्रायद्वीपीय भारत का बड़ा भूभाग जो उत्कल के तालचर के पास फैले क्षेत्र से प्रारम्भ होकर बंगाल, बिहार, दक्षिणी उत्तर प्रदेश, मध्यप्रदेश और महाराष्ट्र से होते हुये आंध्रप्रदेश के सिंगरेनी कोयला क्षेत्र तक फैला हुआ है जीभ के आकार वाली पत्तियों के ग्लासॉप्टेरिस फ्लोरा से आच्छादित था। हिमाच्छादन के प्रारम्भ की ही भाँति इन पादपों के अवशेष गोंडवाना लैण्ड के सभी भागों में पाये जाते हैं जो बाद में टूटकर अलग हो गया और दूर खिसक गया जैसा कि आज दिखाई देता है। वास्तविकता तो यह है कि ग्लासॉप्टेरिस की पत्तियों की 'ड्वाइकाटिलाइट्स' और 'टिलाइट्स' के थोड़ा ऊपर के 'साल्ट रेन्ज' में मिलने वाले अवेशेषों के आधार पर सेवार्ड (1933) और साहनी (1935) ने यह सुझाव रखा कि गोंडवाना लैण्ड का कार्बोपरमियन फ्लोरा अपने प्रारंभिक रूप में हिमाच्छादन के साथ ही लगभग उसी प्रकार रहा होगा जैसा कि न्यूजीलैण्ड का फ्लोरा, जहाँ उष्ण प्रदेशीय 'ट्री फर्न' हिमानी के समीप के क्षेत्रों में उगते हैं। इस काल की प्रारंभिक वनस्पतियों का गोंडवाना हिम के साथ-साथ पाये जाने का सुझाव यहाँ पर ग्लासॉप्टेरिस पादपों के पराग कणों की उपस्थिति के कारण बताया गया (विर्क्की 1943 तथा पन्त 1955) जो आस्ट्रेलिया के 'बच्छुस मार्श टिलाइट' में पाये गये।

जैसे-जैसे गोंडवाना लैण्ड का मौसम गरम होने लगा वैसे-वैसे वहाँ घने जंगल उग आये जिसमें वृक्ष, झाड़ियाँ और विभिन्न प्रकार के शाक थे। छोटे पौधे के पतली पत्तियों वाले चीड़ की तरह के वृक्षों में **बुरिआडिया** (Buriadia), **वाल्कोमियेला** (Walkomiella), **मोरैनोक्लैडस** (Moranocladus) और **सियारसोलिया** (Searsolia) के साथ-साथ चौड़ी पत्तियों वाले **ग्लासॉप्टेरिस** (Glosiopteris), **गैंगैमॉप्टेरिस** (Gangamopteris), **नोएगेरैथिऑप्सिस** (Noeggerathiopsis) और कुछ दूसरे प्रकार के पौधों के मिले-जुले जंगल एक दूसरे के पास उग रहे थे। ये सभी अनावृतबीजी पादप थे पर साथ में **टीटिया** (Tietea) जैसे कुछ वृक्षाकार फर्न भी थे। ऊपर बताई वनस्पतियों में **स्फीनोफिलम** (Sphenophylum), **फाइलोथीका** (Phyllotheca), **शाइजोन्यूरा** (Schizoneura), **रानीगंजिया** (Raniganjia) जैसे स्फेनॉप्सिड्स, लाइकोपाड्स और ब्रायोफाइट्स सम्मिलित थे। फिर भी, बहुत थोड़े से ही लाइकोपाड्स और ब्रायोफाइट्स पहचाने गये हैं क्योंकि इन पादपों के कोमल शरीर ने उन्हें जीवाश्म में परिवर्तित

हो जाने से रोका होगा। किन्तु गोंडवाना कोयले में मेगास्पोरों (megaspores) के अधिक संख्या में पाये जाने के कारण में हमारे भारतीय वनों में एक से अधिक प्रकार के स्पोर वाले लाइकोपाड्स की उपस्थिति की ओर संकेत करते हैं।

गोंडवानालैण्ड में के वानस्पतिक अवशेषों में मरुद्भिदी दशाओं और जलवायु के मौसमी परिवर्तन देखे जा सकते हैं। संभवतः यहाँ गर्म या उष्ण गर्मी का मौसम तथा सर्द जाड़ा था। यहाँ के वृक्षों के तनों के वार्षिक वलयों में 'स्प्रिंग उड' और 'आटम उड' का बहुतायत से पाया जाना इस बात की पुष्टि करता है। बदलते मौसम का एक दूसरा प्रमाण **ग्लासॉप्टेरिस, नोएगेरैथिऑप्सिस** और इसी के समान दूसरे पौधों की झड़ी हुई पत्तियों से जो केवल कभी-कभी ही तनों से लगी मिली हैं यह प्रकट होता है कि इन जंगलों में मुख्य रूप से चौड़ी पत्तियों वाली पर्णपाती स्पीशीज रही होंगी। **बुरिआडिया, वाल्कोमियेला** और **सीयारसॉलिया** जैसे पतली पत्तियों और अ-पर्णपाती पौधों की उपस्थिति गोंडवाना लैण्ड में सर्द जाड़े की पुनः पुष्टि करती हैं।

ये वन उसी काल के लाउरैसिया के उत्तरी वनों से बिल्कुल भिन्न थे जो नम, जलीय और दलदली क्षेत्रों से भरे हुये थे जहाँ की जलवायु पूरे वर्ष अपेक्षाकृत उष्ण रहती थी। इसका प्रमाण है **स्टिगमैरिया** (Stigmaria) और इसकी शाखाओं के भूमिगत भागों में खाली स्थान (वायु के लिये स्थान) की उपस्थिति और लारेसिया के वृक्षों के जाइलम में वृद्धि-वलयों की अनुपस्थिति।

गोंडवाना वनों की समृद्धि का आजकल के वनों से कोई मुकाबला नहीं है। जब घने जंगलों के ये पौधे जलमग्न हो गये तो वे कोयले के मोटे परतों में बदल गये जिनकी मोटाई कहीं-कहीं 150 फीट तक हो गई। हमें एक बात सदैव याद रखनी चाहिये कि ये वन इतने अधिक थे और इतने दीर्घकाल तक उगे रहे कि वे बार-बार बाढ़ के द्वारा जलमग्न होते रहे और इस प्रकार उनके कोयले के परत एक दूसरे पर जमा होकर ढेर बनते गये। इस कोयले का उपयोग हम दीर्घकाल से ऊर्जा के रूप में करते आ रहे हैं और भविष्य में भी दीर्घकाल तक करते रहेंगे। वैसे ऊर्जा का यह ऐसा स्रोत है जिसका नवीकरण संभव नहीं है अतः हमें इस युगयुगों पुरानी धरोहर को बेकार नहीं जाने देना चाहिये।

अनेक जीवाश्म वनस्पतिविज्ञानियों और भूविज्ञानियों ने पहले भी यह बताया है कि हमारा गोंडवाना कोयला योरोप और उत्तरी अमेरिका के कोयले के विपरीत स्वस्थाने धरती के अंदर नहीं बना वरन् यह उस कोयले का प्रतिनिधित्व करता है जिसे 'खिसका हुआ कोयला' कहते हैं। वे वनस्पतियाँ जिनसे यह कोयला बना, नदियों की धाराओं के साथ प्रवाहित होकर बाढ़ के साथ आकर जलमग्न मैदानों में दब गईं और कोयले में बदल गईं। 'विचलन के सिद्धान्त' के पक्ष में जो मुख्य बात कही जाती है वह यह है कि **स्टिगमैरिया** के तनों के आधार पर जड़ें या जड़ों के स्थान नहीं पाये गये जो यूरोप और उत्तरी अमेरिका के कोयले से प्राप्त हुये। किन्तु यह सच नहीं है क्योंकि हमें **वर्टेब्रेरिया** (Vertebraria) के तनों के साथ लगी हुई जड़ें मिली हैं। बीज बहुतायत में मिलते हैं किन्तु इधर हमें सख्त पत्थरों में बदल गये जंगलों की कीचड़ भरी मिट्टी में अंकुरित बीज भी मिले हैं।

ट्राइऐसिक वन

कार्बो-परमियन या निम्न गोंडवाना काल के बाद धीरे-धीरे ट्राइऐसिक या मध्य गोंडवाना काल में एक अन्य प्रकार के वन का विकास हुआ जब जलवायु अपेक्षाकृत शुष्क हो गई और वनस्पतिसमूह

उतने घने नहीं रहे । इस समय अनेक प्रकार की नई वनस्पतियों के साथ ही साथ निम्न गोंडवाना काल के जंगलों के कुछ वृक्ष और झाड़ियाँ ही जीवित रह सकीं जिनमें **ग्लासॉप्टेरिस** (Glossopteris), **नोएगेरैथिऑप्सिस** (Noeggerathiopsis), **स्फीनोफिलम** (Sphenophyllum), **शाइजोन्यूरा** (Schizoneura) और **फिलोथीका** (Phyllotheca) जैसे फर्न की तरह के पौधे, लाइकोपाड्स (जिसे 'बड़े स्पोर या मेगास्पोर इंगित करते हैं) और **नीयोमैरिऑप्टेरिस** (Neomariopteris), **पेकॉप्टेरिस** (Pecopteris) जैसे फर्न थे । ये टेरिडोस्पर्म्स के **लेपिडॉप्टेरिस** (Lepidospteris) और **डाइक्रोयडिअम** (Dicroidium) बेनीटिटेल्स के **टेरोफिलम** (Pterophyllum), सइिकैडोफाइट के **टीनिऑप्टेरिस** (Taeniopteris) और **स्यूडॉक्टेनिस** (Pseudoctenis), और गिगोंफाइट्स के **रिपिडॉप्सिस** (Rhipidopsis) जैसे पादप थे । इस समय जो शुष्क मौसम अधिकांश स्थानों में व्याप्त था, उसके कारण यदा-कदा ही कार्बोनिफेरस स्तर वाले पौधों को भी दबे हुये रूप में सुरक्षित रहने की छूट मिली । भारत में ट्राइऐसिक पेड़-पौधे 'पारसोरा स्टेज' या निधिपुर बेड्स के समय अपने चरमोत्कर्ष पर पहुँच गये । यह नदियों के कटाव से उस समय सामने आया जब गोपद नदी के तट पर **ग्लॉसॉप्टेरिस** (Glossopteris) और उसके समकक्ष पौधों में अधिक कमी आई और **डाइक्रोयडिअम** (Dicroidium) और उससे सम्बन्धित टेरिडोस्पर्म्स (Pteridosperms) प्रभावी हो गये । जीवाश्मों में बहुत थोड़े से ही मोटे तने देखने में आये और वनस्पतियों (पादप समूहों) में बड़े वृक्षों का अभाव हो गया । कुल मिलाकर वनस्पतियाँ इस ओर संकेत करती हैं कि ऐसा सूखा वीरान जंगल था जिसके वृक्षों, झाड़ियों और छोटे शाकीय पौधों के बीच-बीच में नंगी भूमि थी और जहाँ सरीसृप जानवर प्रबल हो गये किन्तु नदी के मुहानों, झीलों और नदी तलों के निकट घने वन विद्यमान थे । ट्राइऐसिक के अंत के समय **डाइक्रोयडिअम** (Dicroidium) और उसके समान पौधों का विनाश हो गया और उस क्षेत्र की जलवायु मरुद्भिदी दशाओं जैसी हो गई ।

जुरैसिक वन

इसके बाद उच्च गोंडवाना की 'राजमहल अवस्था' आती है जिसके जीवाश्म बिहार के राजमहल पर्वतों में भली-भाँति सुरक्षित हैं । इस जुरैसिक काल में भारतीय वनों ने पुनः प्रचुरता प्राप्त कर ली । इस समय की वनस्पतियों में बेनेटाइटैल्स अत्यधिक संख्या में थी जिनके पूर्वगामी प्रारम्भिक ट्राइऐसिक काल में थे । उच्च गोंडवाना वनस्पतिसमूह में बेनेटिटेल्स के **टाइलोफिलम** (Ptilophylum) का बहुतायत में पाये जाने से कुछ शोधकर्त्ताओं ने इसे निम्न गोंडवाना के 'ग्लौसॉप्टेरिस फ्लोरा' और मध्य गोंडवाना के 'डाइक्रोयडिअम फ्लोरा' के विपरीत 'टाइलोफिलम फ्लोरा' का नाम दे डाला है । इस फ्लोरा के अन्य पेड़-पौधों में मैरैटिएसी (Marattiaceae), डिक्सोनिएसी (Dicksoniaceae) थिर्सोटेप्रिडेसी (Thyrsopteridaceae), ग्लिकेनिएसी (Gleicheniaceae), साइथेएसी (Cyatheaceae) और दूसरे **टिनपैहेरिया** (Tinpaharia) जैसे अवर्गीकृत पादप और **लाइकोपोडाइटिस** (Lycopodites), **नियोकैलैमाइट्स** (Neocalamites) तथा **इक्वीसिटाइट्स** (Equisetites) जैसे कुछ फर्न सदृश पौधे थे । मरुद्भिदीय साइकैडोफाइटिक अनावृतबीजियों में बेनेटिटेल्स के वृक्ष थे, जिनमें **विलियमसोनिया** (Williamsonia) अवश्य ही प्रमुख रहा होगा । दूसरे साइकैडोफाइट्स साइकैडेल्स और टेरिडोस्पर्म्स वर्गों के रहे होंगे किन्तु हमें इनका सुनिश्चित ज्ञान नहीं है । **बायेरा** (Baiera) और **गिंगोआइटिस** (Ginkgoites) जैसे गिंगोफाइट्स (Ginkgophytes) के बड़े वृक्ष राजमहल पर्वतों के जंगलों और अन्य स्थानों में उगे हुये थे [इस ग्रुप का एकमात्र जीवित जीनस **गिंगो** (Ginkgo) चीन और जापान में

उगाता है।] इसके साथ उगने वाले दूसरे वृक्षों में विलुप्त **ब्रैकीफाइलम** (Brachyphyllum) के तरह के **क्यूप्रेसैसी** (Cupressaceae) कुल के सदस्य और ठेठ दक्षिणी कुल जैसे पोडोकार्पेसी (Podocarpaceae) जिसका प्रतिनिधित्व **मेहताइया** (Mehtaia), **सिथोलेया** (Sitholeya) आदि और अरौकैरिएसी कुल (Araucariaceae) जिसका प्रतिनिधित्व **अरौकैरिया** (Araucaria) करता है, कुछ अपरिचित लिआनाज (Lianas) जैसे **पेन्टोजाइलॉन** (Pentoxylon) भी इन्हीं पौधों के साथ उग रहे थे। 'राजमहल अवस्था' के वन उष्णकटिबंधी जलवायु में उगे हुये थे किन्तु इन वनों में मुख्य-रूप से मरुद्भिदीय पेड़-पौधे प्रबल थे। ट्राइऐसिक काल के जंगलों की अपेक्षा ये संख्या और वैविध्य में अधिक समृद्ध थे। इन वनों में अंधेरे और नम स्थान भी थे जहाँ फर्न और फर्न की तरह के पौधे और ब्रायोफाइट्स (Bryophytes) के विकास के लिये अत्यन्त उपयुक्त थे।

निम्नक्रिटेशस वन

इसके बाद हम निम्न क्रिटेशस काल के वनों की चर्चा कर रहे हैं जिनके अवशेष बाँसा की जबलपुर अवस्था सिहोरा, चौगान, चाँदिया, चकिआला और दूसरे स्थानों में मिलते हैं। इन वनों के पेड़-पौधों में पहले के जुरैसिक काल के पेड़-पौधे भी हैं और कुछ नये तरह के पेड़-पौधों ने भी जन्म लिया। इन नये पादपों में **ऑनकिऑप्सिस** (Onychiopsis), **वाइक्सेलिआ** (Weicshelia) और **हाउसमैनिया** (Hausmannia) जैसे फर्न और **पैकिप्टेरिस** (Pachypteris) और **हैरिसिओफाइलम** (Harrisiophyllum) जैसे अनावृतबीजी भी थे।

सर्वोपरि क्रिटेशस या प्रारंभिक तृतीयक-महाकल्प वन

निम्न क्रिटेशस युग का अंतिम भाग सारे विश्व में असाधारण रूप से महत्वपूर्ण रहा क्योंकि इसके साथ ही अनावृतबीजी पादपों के 300 मिलियन वर्षों का प्रभुत्व समाप्त होने लगा और इस समय सारे संसार में छाये हुये आवृतबीजी पादपों का युग प्रारंभ हुआ। यद्यपि आज यह ज्ञात नहीं है कि भारत में इस युग में किस प्रकार के वन थे किन्तु क्रिटेशस युग के अन्त में अथवा तृतीयक-महाकल्प युग के प्रारंभिक समय में भारतीय प्रायद्वीप का एक बड़ा भाग-उत्तर पश्चिम में काठियावाड़ से लेकर मध्य प्रदेश तक और दक्षिणी भारत के लगभग पूरा हिस्सा आवृतबीजी पादप-बहुल वनों से आच्छादित था।

वस्तुतः इसी समय पूर्व में शिलांग के पठारी भाग में भी, जो सम्भवतः कोई द्वीप रहा होगा, आवृतबीजी वनों का अस्तित्व था। इस काल के वन उष्णकटिबंधी रहे होंगे जिनमें उगने वाले वृक्षों में नदी के मुहानों और ताजे जल स्रोतों पर उगने वाले वृक्ष पर्णपाती वृक्ष और हरित वृक्ष सभी पाये जाते थे। इस प्रायद्वीपीय भारत के वन आज हमें दक्षिणी इन्टरट्रैपियन तलशिलाओं के मध्य ज्वालामुखी के प्रस्तर तलों में सुरक्षित मिलते हैं। ये वन ज्वालामुखी विस्फोटों के मध्य होने वाले निष्क्रिय अन्तरालों में बढ़ते थे और उनकी जटिल बनावट सिलिकामय हो गये तनों, जड़ों, पत्तियों, पुष्पों और फलों में बड़े सुन्दर ढंग से सुरक्षित है। मध्यप्रदेश के शाहपुरा नामक स्थान के घुगवा ग्राम में ऐसे एक वन के टूटे अवशेष देखे जा सकते हैं जहाँ टहनियाँ, पत्तियाँ, फल और बीज सब पत्थर बन चुके हैं। इन जंगलों में फर्न और फर्न जैसे पादप सम्मिलित थे। इनमें पॉलीपोडिएसी (Polypodiaceae), पार्केरिएसी (Parkeriacae) मर्सीलिएसी (Marsileaceae) और साल्विनिएसी (Salviniaceae) कुलों के सदस्य हैं। पूर्ववर्ती कालों में इनका कोई लेखाजोखा नहीं मिलता। मार्सीलिएसी का एक सदस्य, **रोडेइटीज** (Rodeites) तो

भारत के दक्षिणी अमेरिका से पूर्वसम्बन्ध को भी प्रकट करता है। अनावृतबीजी बहुत कम हो गये थे। वे पोडोकार्पेसी (Podocarpaceae) और अरौकैरिएसी (Araucariaceae) कुलों के मात्र कुछ सदस्यों में ही सिमट कर रह गये थे। एकबीजपत्रियों के लगभग 9 कुल और द्विबीजपत्रियों के 44 कुल प्रतिनिधित्व करते हैं। एकबीजपत्री पादपों में **नारियल** (Cocos), **नाइपा** (Nypa) और **केला** (Musa) प्रमुख हैं। ऐसे कुछ एकबीजपत्री जो आज इस क्षेत्र में नहीं पाये जाते वे हैं—कैनेसी (Cannaceae) और साइक्लैन्थेसी (Cyclanthaceae)। द्विबीजपत्रियों में बेरबेरिडेसी (Berberidaceae), निम्फिएसी (Nympheaceae), बॉम्बैकेसी (Bombacaceae), टिलिएसी (Tiliaceae), मेलिएसी (Meliaceae), एनाकार्डिएसी (Anacardiaceae), लेगुमिनोसी (Leguminosae), मिर्टेसी (Myrtaceae), लाइथ्रेसी (Lythraceae), लेन्टीबुलैरिएसी (Lentibulariaceae), राइजोफोरैसी (Rhizophoraceae), कॉम्ब्रेटैसी (Combretaceae), सोनेरैटिएसी (Sonneratiaceae), ओनैग्रेसी (Onagraceae), वर्बिनैसी (Verbenaceae), एबिनैसी (Ebenaceae), कैजुआइरिनैसी (Casuarinaceae) और प्रोटेएसी (Proteaceae) जैसे कुल शामिल हैं। इनमें से कैजुआइरिनैसी (Casuarinaceae), प्रोटिएसी (Proteaceae) और साइक्लैन्थेसी (Cyclanthaceae) आज 'डेकनफ्लोरा' में नहीं मिलते। साइक्लैन्थेसी (Cyclanthaceae) के **रोडेआइटीज** (Rodeites) जैसे सदस्य की उपस्थिति निश्चय ही भारत से दक्षिणी अमेरिका के सम्बन्ध की ओर इंगित करती है जबकि प्रोटेएसी और कैजुएरिनैसी आस्ट्रेलिया के साथ सम्बन्ध के अवशेष जान पड़ते हैं। यद्यपि, अनेक परिचित टेरिडोफाइट्स और आवृतबीजियों के साथ पेड़-पौधे समान दिखते हैं किन्तु विस्तार में वे आज से बहुत भिन्न थे। इसमें अनेक ताड़ (Palms) थे पर आज मात्र खजूर (फोयेनिक्स-Phoenix) जो जंगली है और नाइपा (Nypa) जो समुद्रतटीय है मिलते हैं। निस्संदेह ये वन नम कोंकण की जैसी उष्णकटिबंधीय, समुद्रतटीय जलवायु की ओर संकेत करते हैं जहाँ ताजे पानी के साधन यत्र-तत्र बिखरे हुये हैं। कुल मिला कर ऐसा लगता है जैसे वनों में उगने वाली किस्में जिन्हें आजकल के कुलों और वंशों में स्थान दिया गया है वे ऐसी स्पीशीज हैं जो विलुप्त हो चुकी हैं।

निओजीन और परवर्ती वन

बाद में निओजीन युग में जंगलों की वनस्पतियाँ वर्तमान युग की देशी वनस्पतियों के और निकट आ गईं। देश के किसी भी भाग से चतुर्थक वनों के जो अवशेष मिले हैं उनसे स्पष्ट है कि वर्तमान वनस्पतियों और पूर्वकालीन वनस्पतियों में बहुत कम भिन्नता है। वैभिन्य केवल उनके भौगोलिक और ऊर्ध्वाधर वितरण में है। वर्तमानकालीन वनस्पतियों में प्रायद्वीपीय भारत से पोडोकार्पस वैलीचियेनस (Podocarpus wallicianus) के अतिरिक्त समस्त शंकुधारी वृक्षों का और पूरे भारत से अरौकेरियेसी (Araucariaceae) का विलोप विशेष रूप से उल्लेखनीय है। कश्मीर क्षेत्र की चतुर्थक वनस्पतियाँ और आज की वनस्पतियाँ बहुत कुछ एकसी हैं किन्तु कुछ जातियाँ जैसे सिंघाड़ा (Trapa) जो 9000 फ़ीट की ऊँचाई पर ढालू तलशिलाओं के बीच पाई गई हैं, आज वहाँ नहीं उग सकतीं। इससे इस बात का संकेत मिलता है कि करेवा की तलशिलायें हिमालय के उत्थान से आज से 2 मिलियन वर्ष पूर्व, हमारे निकट भूतकाल (Pleistocene) में, ऊपर उठ गई होंगी।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

जैकोबी श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता

के० पी० पाण्डय, वी० एन० त्रिपाठी तथा एल० एम० त्रिपाठी

गणित विभाग, बनारस हिन्दू बिश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—सितम्बर 22, 1983]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जैकोबी श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता दी गई है। इसमें कई ज्ञात परिणामों का सार्वीकरण किया गया है।

Abstract

On the Nörlund summability of Jacobi series. *By* K. P. Pandey, V. N. Tripathi and L. M. Tripathi, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

The present paper deals with the Nörlund summability of Jacobi series; it generalises various known results.

1. माना कि $f(x)$ को परिबद्ध अन्तराल $[-1,1]$ में इस तरह परिभाषित किया जाता है कि समाकल

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}.(1+x)^{\beta}.f(x)\,dx, \tag{1.1}$$

$\alpha>-1, \beta>-1$; सहित लेबेस्ग के अर्थ में विद्यमान रहता है। फलन $f(x)$ के संगत जैकोबी श्रेणी को इस प्रकार दिया जाता है

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{1.2}$$

जहाँ

$$a_n = 1/g_n \int_{1-}^{1} (1-x)^{\alpha}.(1+x)^{\beta} f(x) J_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx \tag{1.3}$$

तथा

$$g_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}, \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{(\Gamma n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \tag{1.4}$$

तथा $J_n^{(\alpha,\beta)}$ x जैकोबी बहुपद हैं जिन्हें जनक फलन

$$2^{\alpha+\beta}(1-2xt+t^2)^{-1/2}[1-t+(1-2xt+t^2)^{1/2}]^{-\alpha}$$
$$\times[1+t+(1-2xt+t^2)^{1/2}]^{-\beta}$$
$$=\sum_{n=0}^{n} J_n^{(\alpha,\beta)}(\alpha).t^n \tag{1.5}$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है। हम लिखेंगे

$$F(\theta)=\{f(\cos\theta)-A\}(\sin\theta/2)^{2\alpha+1},(\cos\theta/2)^{2\beta+1} \tag{1.6}$$

जिसमें A एक स्थिर अचर है तथा $[1/t]$ सूचित करता है $1/t$ के समाकल अंश को।

माना कि Σa_n एक अनन्त श्रेणी है जिसमें $\{S_n\}$ आंशिक योगफलों का अनुक्रम है तथा माना कि $\{p_n\}$ वास्तविक या संमिश्र अचरों का अनुक्रम है जिसके साथ

$$P_n=\sum_{m=0}^{n} p_m \tag{1.7}$$

अनुक्रमशः रूपान्तरण

$$t_n=1/P_n\sum_{m=0}^{n} p_m\, S_{n-m} \tag{1.8}$$

से nवाँ नारलुंड माध्य $\{pn\}$ गुणांकों के अनुक्रम से उत्पन्न अनुक्रम $\{Sn\}$ के (N, pn) माध्य को परिभाषित किया जाता है। यदि

$$t_n\to S \tag{1.9}$$

ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, तो अनुक्रम $\{Sn\}$ या श्रेणी Σa_n को योगफल S में संकलनीय (N,p_n) कहा जाता है।[3]

नारलुंड संकलनीयता विधि के नियामक प्रतिबन्ध हैं

$$\text{(i)}\quad p_n=0(P_n) \tag{1.10}$$

तथा

$$\text{(ii)}\quad \sum_{k=0}^{n}|p_k|=O(|P_n|), \tag{1.11}$$

ज्यों-ज्यों $n\to\infty$ (हार्डी [2])।

2. गुप्ता[1] ने जैकोबी श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय की स्थापना की है।

प्रमेय A : माना $\{pn\}$ एक अनृण वर्धमान अनुक्रम है जिससे कि

$$\sum_{k=a}^{n} \frac{P_k}{k^{(2\alpha+3/2}.\log k}=O\left[\frac{P_n}{n^{(2\alpha+1)1/2}}\right], \tag{2.1}$$

a एक स्थिर धन पूर्णांक है तथा

$$\Sigma \frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}<\infty \tag{2.2}$$

यदि

$$\psi/t)=\int_0^t F(\theta)\, d\theta=o\left[\frac{t^{2\alpha+2}}{\log 1/t}\right],\ t\to o, \tag{2.3}$$

तो जैकोबी श्रेणी (1.2) योगफल A में विन्दु $x=1$ पर संकलनीय (N, pn) बशर्ते कि

$$-\tfrac{1}{2}\leqslant\alpha<\tfrac{1}{2},\ \beta<-\tfrac{1}{2}$$

तथा प्रतिध्रुव प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{(2\beta-3)/4}\,|f(x)|\, dx<\infty, \tag{2.4}$$

जहाँ b स्थिर है, तुष्ट होता है।

इस प्रपत्र में हम प्रमेय A को अत्यन्त सामान्य प्रतिबन्ध के अन्तर्गत निम्नलिखित की स्थापना करके सुधारेंगे।

प्रमेय : माना कि $\{p_n\}$ एक अनृण-एकदिष्ट अवर्धमान अचरों का अनुक्रम है जिससे कि $P_n\to\infty$ ज्यों-ज्यों $n\to\infty$ तथा

$$\log n=O(P_n), \tag{2.5}$$

$$n^{(2\alpha+1)/2}=o(P_n), \tag{2.6}$$

तथा

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P}{k^{(2\alpha+3)/2}\log k}=O\left[\frac{P_n}{n^{(2\alpha+1)/2}}\right], \tag{2.7}$$

ज्यों-ज्यों

$$n\to\infty;\ \alpha>-\tfrac{1}{2},\ \beta-\alpha>-1,\ \beta+\alpha\geqslant-1.$$

यदि

$$\int_0^t |F(\theta)|\, d\theta=0\left[\frac{t^{2\alpha+2}}{P_{[1/t2]}}\right], \tag{2.8}$$

ज्यों-ज्यों $t \to o$ तथा प्रतिध्रुव प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{(\beta-\alpha-1)/2} \, |f(x)| \, dx < \infty, \tag{2.9}$$

तुष्ट होता हो जहाँ b स्थिर है तो श्रेणी (1.2) बिन्दु $x=1$ पर योगफल A में संकलनीय (N, p_n) होगी ।

3. हमारे प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकायें संगत होंगी ।

प्रमेयिका 1. (गुप्ता 1970, p. 79)

माना

$$N_n(\theta) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_m \, \lambda_{n-m} \, J_{n-m}^{(\alpha+1,\beta)} \, (\cos\theta), \tag{3.1}$$

जहाँ

$$\lambda_n = \frac{2^{-\alpha-\beta-1} \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)} \sim \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma\alpha+1} n^{\alpha+1} \tag{3.2}$$

(i) तो $0 \leqslant \theta \leqslant 1/n$ के लिये

$$|N_n(\theta)| = O(n^{2\alpha+2}) \tag{3.3}$$

(ii) $1/n \leqslant \theta \leqslant \pi - 1/n$, $\alpha \geqslant -1/2$ के लिए

$$|N_n(\theta)| = 1/P_n . O\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2} P[1/\theta]}{\sin^{(2\alpha+3)/2}\theta/2 \, \cos^{(2\beta+1)/2}\theta/2}\right]$$

$$+ O\left[\frac{n^{(2\alpha-1)/2}}{\sin^{(2\alpha+5)/2}\theta/2 \, \cos^{(2\beta+3)/2}\theta/2}\right] \tag{3.4}$$

तथा $\pi - 1/x \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\alpha \geqslant -1/2$, $\beta > -1/2$ के लिये

$$|N_n(\theta)| = o(n^{(\alpha+\beta+1)}) \tag{3.5}$$

प्रमेयिका 2. माना $\beta - \alpha > -1$. प्रतिध्रुव प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{(\beta-\alpha-1)/2} \, |f(x)| \, dx < \infty$$

समतुल्य है

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{(\beta-\alpha-1)/2} \, |f(x) - A| \, dx < \infty$$

के जो आगे चलकर

$$\int_{a}^{\pi} (\cos^{-\alpha-\beta-1} \theta/2 \, |F(\theta)| \, d\theta < \infty. \tag{3.6}$$

4. प्रमेय की उपपत्ति : आब्रेकाफ[4] का अनुसरण करते हुये श्रेणी (1.2) का बिन्दु $x=1$ पर nवाँ आंशिक योगफल दिया जाता है

$$S_n(1)=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^\pi \sin^{2\alpha+1}\theta/2\cos^{2\beta+1}\theta/2\, f(\cos\theta)\, S_n(1,\cos\theta)\, d\theta$$

के द्वारा जहाँ $S_n(1, \cos\theta)$ से श्रेणी

$$\Sigma\, J_n^{(\alpha,\beta)}(1)\, J_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)/gn.$$

का nवाँ आंशिक योगफल सूचित होता है। राव[5] ने दिखाया है कि

$$S_n(1, \cos\theta)=\lambda_n\, J_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\theta).$$

अत:

$$S_n(1)-A=2^{\alpha+\beta+1}\lambda_n\int_0^\pi \sin^{2\alpha+1}\theta/2\cos^{2\beta+1}\theta/2\,[f(\cos\theta)-A] \times J_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\theta)d\theta$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\lambda_n\int_0^\pi F(\theta)\, J_n^{(\alpha+1,\beta}(\cos\theta)\, d\theta \qquad (4.1)$$

अत: (1.8) से बिन्दु $x=1$ पर श्रेणी (1.2) के लिये

$$t_n-A=1/P_n\sum_{m=0}^{n} p_m\,[S^{(1)}_{n-m}-A]$$

$$=1/P_n\sum_{m=0}^{n} p_m.2^{\alpha+\beta+1}.\lambda_{n-m}$$

$$\times\int_0^\pi F(\theta)\, J_{n-m}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\theta)\, d\theta$$

$$=\int_0^\pi F(\theta)\, N_n(\theta)\, d\theta \quad \text{ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \qquad (4.2)$$

अब यदि हम यह दिखला दें कि

$$I=\int_0^\pi F(\theta)\, N_n(\theta)\, d\theta=(1), \quad \text{ज्यों-ज्यों } n\to\infty \qquad (4.3)$$

तो प्रमेय की स्थापना हो जावेगी। अब हम लिखेंगे

$$I=\left[\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\infty}+\int_{\infty}^{\pi-1/n}+\int_{\pi=1/n}^{\pi}\right] F(\theta)N_n(\theta)\, d\theta,$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4, \text{ माना} \tag{4.4}$$

जहाँ δ एक समंजित अचर है। अब (2.8) तथा (3.3) के सम्प्रयोग से

$$|I_1|=\left|\int_0^{1/n} F(\theta)\, N(\theta)\, d\theta\right|$$

$$=O(n^{2\alpha+2}).\int_0^{n/1} |F(\theta)|\, d\theta$$

$$=O(n^{2\alpha+2})\; o\left[\frac{n^{-2\alpha-2}}{P_n}\right]$$

$$=o\left(\frac{1}{P_n}\right)$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \tag{4.5}$$

हमें इसके बाद I_2 पर विचार करेंगे। (3.4) से

$$I_2=O\left[\int_{1/n}^{\delta} |F(\theta)|\,.\,\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\, P_{[1/\theta]}\, \sin^{-(2\alpha+3)/2}\theta/2,\, d\theta\right.$$

$$+O\left[\int_{1/2}^{\delta} |F(\theta)|\, \frac{n^{(2\alpha-1)/2}}{\sin^{(2\alpha+5)/2}\theta/2}\, d\theta\right.$$

$$=I_{21}+I_{22}, \text{ माना} \tag{4.6}$$

अब (2.5), (2.6) तथा (2.8) से

$$|I_{21}|=O\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right]\cdot\int_{1/n}^{\delta} |F(\theta)|\, \frac{P_{[1/\theta]}}{\theta^{(2\alpha+3)/2}}\, d\theta$$

$$=O\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right]\cdot\left[o\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{P_{[1/t]}}\right)\frac{P_{[1/t]}}{t^{(2\alpha+3)/2}}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right]\cdot\int_{1/n}^{\delta} o\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{P_{[1/t]}}\right) d\left[\frac{P_{[1/t]}}{t^{(\alpha+3)/2}}\right]$$

$$=o(1)+O\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right] o\left[\int_{1/\delta}^{n} \frac{1}{P_{[k]}}\, \frac{d\{k^{2\alpha+3)/2}P_{[k]}\}}{k^{2\alpha+2}}\right]$$

$$=o(1)+o\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right]\cdot o\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{k^{(2\alpha+3)/2}\log k}\right],$$

जहाँ

$a=[1/\delta]+1,\ n\geqslant[1/t],$

$$=o(1)+o\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right], o\left[\frac{P_n}{n^{(2\alpha+1)/2}}\right]$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \tag{4.7}$$

पुनः I_{22} पर विचार करते हुये, (2.8) से तथा अंशतः समाकलन से

$$I_{22}=O\left(n^{(2\alpha-1)/2}\right)\int_{1/n}^{\delta}|F(\theta)|.\theta^{(-2\alpha-5)/2}, d\theta$$

$$=O(n^{(2\alpha-1)/2})\left[O\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{P_{[1/t]}}\right)\cdot\frac{1}{t^{(2\alpha+5)/2}}\right]_{1/n}^{\delta}$$

$$+O\left(\frac{n^{(2\alpha-1)/2}}{P_n}\right)\left[\int_{1/n}^{\delta}t^{(2\alpha-3)/2}.\,dt\right]$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \tag{4.8}$$

(4.7), (4.8) तथा (4.9) को संयुक्त करने पर

$$I_2=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \tag{4.9}$$

पुनः I_3 पर विचार करने पर

$$I_3=O\left\{\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\cdot\int_{\delta}^{\pi-1/n}\cos^{(-2\beta-1)/2}\theta/2.|F(\theta)|\,d\theta\right\}$$

$$+O\left\{n^{(2\alpha-1)/2}.\int_{\delta}^{\pi-1/n}\cos^{(-2\beta-3)/2}\theta/2.|F(\theta)|\,d\theta\right\}$$

$$=I_{31}+I_{32}, \text{ माना} \tag{4.10}$$

चूंकि $\alpha\geqslant-\frac{1}{2}$, अतः

$$-\beta-\tfrac{1}{2}\leqslant-\beta-\alpha-1,$$

जिससे कि (3.6) से

$$\int_{\delta}^{\pi}\cos^{(-2\beta-1)/2}|F(\theta)|\,d\theta<\infty,$$

अतः

$$I_{31}=O\left[\frac{n^{(2\alpha+1)/2}}{P_n}\right]$$

$$=o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n\to\infty. \tag{4.11}$$

पुनः (2.8) से यह देखा जा सकता है कि किसी दिये गये $\epsilon>o$ के लिये एक संगत धन संख्या ξ होगी जिससे कि

$$\int_{\pi-\xi}^{\pi} \cos^{-\alpha-\beta-1} \theta/2. \, |F(\theta)| \, d\theta > \epsilon \qquad (4.12)$$

अतः $n > 1/\xi$, रखने पर (चूंकि $\beta+\alpha \geqslant -1$); (4.3) से

$$n^{(2a-1)/2} \int_{\pi-\xi}^{\pi-1/n} \cos^{(-2\beta-3)/2} \theta/2 |F(\theta)| \, d\theta$$

$$\leqslant n^{(2a-1)/2} [\cos \{\tfrac{1}{2}(\pi - 1/n)\}]^{(2-\alpha 1)/2} \int_{\pi-\xi}^{\pi-1/n} \cos^{-\alpha-\beta-1} \theta/2 \, . \, |F(\theta)| \, d\theta$$

$$< 2 \, \epsilon,$$

बशर्ते कि n काफी बड़ा हो। लेकिन ξ को एक बार स्थिर किया जा चुका है, चूंकि $\alpha < \frac{1}{2}$; (3.6) के द्वारा

$$I_{32} = O \, (n^{(2a-1)/2}) \int_{\delta}^{\pi-\xi} \cos^{-\alpha-\beta-1} \theta/2 \, |F(\theta)| \, d\theta$$

$$= O \, [n^{(2a-1/2]}]$$

$$= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \qquad (4.13)$$

अतः (4.11), (4.12) तथा (4.13) से यह होता है कि

$$I_3 = o(1), \text{ ज्यो-ज्यों } n \to \infty. \qquad (4.14)$$

अन्त में I_4 पर विचार करने पर, चूंकि $\alpha+\beta+1 \geqslant o$, हमें (3.6) से (4.15) प्राप्त होता है

$$I_4 = O \, (n^{\alpha+\beta+1}) \int_{\pi-1/n}^{\pi} |F(\theta)| \, d\theta$$

$$= O \left[\int_{\pi-1/n}^{\pi} \cos^{-\alpha-\beta-1} \theta/2 \, |F\theta| \, d\theta \right.$$

$$= o(1), \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty, \qquad (4.15)$$

इस तरह (4.4), (4.5), (4.9), (4.14) एवं (4.15) को संयुक्त करने पर हमें (4.3) की प्राप्ति होती है। इस तरह हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में से के० पी० पाण्डेय, सी० एस० आई० आर० के प्रति कृतज्ञ है जहाँ से जूनियर रिसर्च फेलोशिप प्राप्त हुई।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी०, **डी० एस-सी० थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1970.

2. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, यूनिवर्सिटी प्रेस, आक्सफोर्ड, 1949.

3. नारडलुंड, एन० ई०, Lund. Univ. Arsckrifts, 1919, **16** (2), No. 3.

4. आब्रेचाफ, एन०, Ann.Univ. Sofia. Fac. Phys. Math., 1936, **32**, 39-135.

5. राव, एच०, J. Reine. Angew. Math, 1929, **16**, 237-254.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

लेगेण्ड्र श्रेणी की एकसमान त्रिभुजी मैट्रिक्स संकलनीयता

एल० एम० त्रिपाठी तथा एस० लाल
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—मार्च 6, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने लेगेण्ड्र श्रेणी की एकसमान त्रिभुजी मैट्रिक्स संकलनीयता से सम्बन्धित एक परिणाम प्राप्त किया है जो द्विवेदी द्वारा दिये गये लेगेण्ड्र श्रेणी की एकसमान हार्मोनिक संकलनीयता सम्बन्धी परिणाम से अधिक व्यापक है।

Abstract

On uniform triangular matrix summability of Legendre series. *By* L. M. Tripathi and S. Lal, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi-5

In this paper we have obtained a result on uniform triangular matrix summability of Legendre series which is more general than the result for uniform harmonic summability of Legendre series by Dwivedi.

1. यदि $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ एक अनन्त श्रेणी है जिसका nवां आंशिक योग $\{S_n(x)\}$ है। तो माना कि

$((\lambda_{n,k}))$ $(n=0, 1, ..., k=0, 1, ..., n, \lambda_{n,o}=1)$ वास्तविक या संकुल संख्याओं का एक त्रिभुजी मैट्रिक्स है। माना कि

$$\sigma_n(x)=\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k}u_k(x)=\sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k}S_k(x), \tag{1.1}$$

जहाँ $\triangle\lambda_{n,k}=\lambda_{n,k}-\lambda_{n,k+1}$

तथा $\triangle^2\lambda_{n,k}=\triangle\lambda_{n,k}-\triangle\lambda_{n,k+1}$.

यदि $\sigma_n(x) \to S(x)$ (1.2)

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, तो हम कहते हैं कि श्रेणी $\Sigma U_n(x)$ बिन्दु x पर[3] संकलनीय ($\wedge$) है $S(x)$ तक।

यदि $\sigma_n(x) - S(x) = 0(1)$. (3.1)

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, समुच्चय E में समान रूप से, तो हम कहते हैं कि श्रेणी $\Sigma U_n(x)$ समुच्चय E में संकलनीय ($\wedge$) है योगफल $S(x)$ तक।

विशेष रूप से, यदि

$$\Delta\lambda_{n,k} = \begin{cases} [(n+1-k)\log n]^{-1}, & k \leq n \\ 0, & k > n, \end{cases} \tag{1.4}$$

तो $\sigma_n(x)$ जो (1.1) द्वारा परिभाषित है वही है जो अनुक्रम $\{S_n(x)\}$ का हार्मोनिक मध्य $\left(N, \frac{1}{n+1}\right)$.

2. परास $(-1, 1)$ में लेबेस्ग समाकलनीय फलन $f(x)$ से सम्बद्ध लेगेण्ड्र श्रेणी को (2.1) द्वारा दिया जाता है

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{2.1}$$

जहाँ $a_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx$ (2.2)

तथा nवां लेगेण्ड्र बहुपद $P_n(x)$ को जनक फलन (2.3) द्वारा परिभाषित किया जाता है—

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z)^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, z^n. \tag{2.3}$$

हम निम्नलिखित संकेतों का उपयोग करेंगे

$$\psi(t) = \psi_\theta(t) = f\{\cos(\theta - t)\} - f(\cos\theta) \tag{2.4}$$

तथा

$$N_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \Delta\lambda_{n,k} \frac{\sin(k+1)t}{\sin t/2}. \tag{2.5}$$

3. द्विवेदी[1] ने लेगेण्ड्र श्रेणी की एकसमान हार्मोनिक समाकलनीयता विषयक निम्नलिखित प्रमेय की स्थापना की है।

प्रमेय A. यदि

$$\int_0^t |f(x\pm u)-f(x)|\,du=0\left[\frac{t}{\log\ 1/t}\right] \tag{3.1}$$

ज्यों-ज्यों $t\to+0$, समुच्चय E में समान रूप से जिसे अन्तराल $(-1, 1)$ में, परिभाषित किया गया है जिसमें $f(x)$ परिबद्ध है तब श्रेणी (2.1) योगफल $f(x)$ में समान रूप से E में हार्मोनिक माध्य द्वारा संकलनीय है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम उपर्युक्त परिणाम को लेगेण्ड्र श्रेणी की एकसमान त्रिभुजीय मैट्रिक संकलनीयता के लिये निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करते हुये विस्तृत करना चाहते हैं।

प्रमेय : यदि

$$\int_t^\eta \frac{|\psi(u)|}{u^2}\,du=0\left[\frac{\epsilon k'(t)}{t}\right],\ (k'\geqslant 1), \tag{3.2}$$

ज्यों-ज्यों $t\to 0$ समान रूप से समुच्चय E में अन्तराल $(-1, 1)$ में जिसमें $f(x)$ परिबद्ध है जहाँ

(i) $0\leqslant t<\eta<\pi$ स्थिर है;

(ii) $\epsilon k'(t)$ t का धनात्मक फलन है;

(iii) $\epsilon k'(t)\to 0$ ज्यों-ज्यों $t\to 0$;

(iv) $\epsilon k'(t)$ एकदिष्ट है (n^{-1},η) में।

तब श्रेणी (2.1) योगफल $f(x)$ तक समुच्चय E में समान रूप से संकलनीय $(\wedge)$ है।

टिप्पणी : ध्यान देने की बात है कि हमारा प्रतिबन्ध निम्नलिखित बातों में प्रमेय A के प्रतिबन्ध (3.1) से अधिक उदार है।

फोआ[2] का अनुगमन करते हुये यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रतिबन्ध (3.1) के अन्तर्गत

$$\int_0^t |f\{\cos(\theta-y)\}-f(\cos\theta)|\,dy=0\,[t.\epsilon k'(t)], \tag{3.3}$$

ज्यों-ज्यों $t\to 0$, जहाँ $x=\cos\theta$, $x+u=\cos\phi$, $\theta-\phi=y$; जिससे (2·4) के अनुसार

$$\int_0^t |\psi(y)|\,dy=0\,[t\epsilon k'(t)],\ (k'\geqslant 1), \tag{3.4}$$

ज्यों-ज्यों $t \to 0$ । अब देखा जा सकता है कि अंशतः समाकलन करने पर (3.2) से (3.4) प्राप्त होता है । हमें ज्ञात है कि

$$\int_0^t |\psi(y)|\, dy = \int_0^t y^2 \cdot \frac{|\psi(y)|}{y^2}\, dy$$

$$= \left[y^2 \cdot 0\left(\frac{\epsilon k'(t)}{t}\right)\right]_0^t - 2\int_0^t y \cdot o\left(\frac{\epsilon k'(t)}{t}\right) dy$$

$$= 0\,[t\epsilon k'(t)], \text{ ज्यों-ज्यों } t \to 0.$$

4. प्रमेय की उपपत्ति के दौरान हम निम्नलिखित प्रमेयिकाओं का उपयोग करेंगे ।

प्रमेयिका 1[6]

$$\sum_{v=0}^{n} (2v+1) P_v(x) P_v(y) = \frac{(n+1)P_{n+1}(y)P_n(x) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x} \tag{4.1}$$

यह तत्समक संकलन का क्रिस्टोफेल सूत्र कहलाता है ।

प्रमेयिका 2[5] : यदि

$$\left\{ \triangle \lambda_{n,k} \right\}_{k=0}^{n}$$

एक अनृण तथा k के प्रति ह्रासविहीन अनुक्रम हो तो $0 \leqslant a < b \leqslant \infty$, $0 < t \leqslant \pi$ के लिये तथा किसी n के लिये

$$\left| \sum_{k=a}^{b} \triangle \lambda_{n,n-k}\, e^{i(n-k)t} \right| = O\,[1/t \cdot \triangle \lambda_{n,n-\tau}], \tag{4.2}$$

जहाँ τ समाकल अंश है $1/t$ का ।

प्रमेयिका 3[5] : यदि

$$\left\{ \triangle \lambda_{n,k} \right\}_{k=0}^{n}$$

एक अनृण तथा k के प्रति ऐसा ह्रासविहीन अनुक्रम हो कि

$$\sum_{k=0}^{n} \triangle \lambda_{n,k} = 1,$$

तो ज्यों-ज्यों $n \to \infty$,

$$\triangle\lambda_{n,k} = O\left(\frac{1}{n-k+1}\right),$$

समस्त $k \leqslant n$ के लिये समान रूप से, जिससे

$$\triangle\lambda_{n,0} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (4.3)$$

प्रमेयिका 4. यदि $N_n(t)$ को (2.5) के अनुसार दिया जाय तो

$$|N_n(t)| = O(n),$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty, 0 < t \leqslant 1/n$ में समानरूप से ।

प्रमेयिका 4 की उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$|N_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \frac{\sin (k+1)\ t}{\sin t/2} \right|$$

$$= O\left\{ \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}| \cdot (k+1) \right\}.$$

अब आबेल के रूपान्तर का प्रयोग करने पर

$$|N_n(t)| = O\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |k+1-k-2| \cdot \sum_{v=0}^{k} |\triangle\lambda_{n,v}| \right.$$

$$\left. + (n+1) \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}| \right\}$$

$$= O\left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \sum_{v=0}^{k} |\triangle\lambda_{n,v}| \right\} + (n+1) \sum_{k=0}^{n} |\triangle\lambda_{n,k}| \right\}$$

$(\wedge)$-संकलनीयता के नियमितता प्रतिबन्ध से एक ऐसा अचर M पाया जाता है कि प्रत्येक n के लिये[3]

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\triangle\lambda_{n,k}| < M,$$

अतएव, हमें प्राप्त होगा

$$|N_n(t)|=O\,[M\,.\,n+(n+1)\cdot M] \tag{4.4}$$

$$=O\,(n)$$

ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, $0<t\leqslant 1/n$ में समान रूप से ।

5. प्रमेय की उपपत्ति : श्रेणी (2.1) का nवाँ आंशिक योगफल है

$$S_n(x)=\sum_{v=0}^{n} a_v P_v(x)$$

$$=\sum_{v=0}^{n}\frac{(2v+1)}{2}\int_{-1}^{1} f(y)P_v(y)P_v(x)\,dy, \text{ (2.2) से} \tag{2.2}$$

$$=\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(y)P_n(x)-P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}f(y)\,dy, \text{ (4.1) से} \tag{4.1}$$

$f(y)=1$ रखने पर यह देखा जा सकता है कि

$$1=\frac{n+1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_{n+1}(y)P_n(x)-P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}\,dy,$$

अतएव $S_n(x)-f(x)=\dfrac{n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}[f(y)-f(x)]$

$$\times\frac{P_{n+1}(y)P_n(x)-P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}\,dy.$$

हम एक धनात्मक संख्या $s<1$ लेते हैं और इसे अन्य धनात्मक संख्याओं α तथा β का योगफल मान लेते हैं। माना कि δ एक ऐसी अन्य धनात्मक संख्या है जिससे कि $0<\delta<\alpha$ तथा αx और $\alpha x'$ x का संतत फलन है जो $(-1, 1)$ के अन्तर्गत है और $\delta\leqslant\alpha x\leqslant\alpha$, $\delta\leqslant\alpha x'\leqslant\alpha$ सीमाओं के अन्तर्गत स्थित है। अतएव $-1+S\leqslant x\leqslant 1-S$ के लिये

$$S_n(x)-f(x)=\frac{n+1}{2}\left[\int_{-1}^{x-\alpha x}+\int_{x-\alpha x}^{x+\alpha x'}+\int_{x+\alpha x'}^{1}\right] \tag{5.1}$$

$$=A_n(x)+B_n(x)+C_n(x), \text{ माना}$$

हाब्सन[4] ने दिखलाया है कि $-1+S\leqslant x\leqslant 1-S$ के लिये एक समानरूप से

$$\lim_{n\to\infty} A_n(x)=0,\ \lim_{n\to\infty} C_n(x)=0. \tag{5.2}$$

अब हम कल्पना करते हैं कि

$$x=\cos\theta,\ y=\cos\phi,\ 0<\theta\leqslant\pi,\ 0<\phi<\pi,\ 1-\beta=\cos\rho,$$

$$1-(\alpha+\beta)=1-s=\cos(\rho+\sigma),\ 0<\rho<\pi/2,\ 0<\sigma,\ \rho+\sigma<\pi/2.$$

इस प्रकार यदि $\eta\ (-1,\ 1-\alpha)$, में [arc cos u—arc cos $(u+\alpha)$] के न्यूनतम को सूचित करता है u के लिये तो हमें सैंसोन[6] के अनुसार

$$B_n(\cos\theta)=\frac{n+1}{2}\int_{\theta+\eta}^{\theta+\eta}[f(\cos\phi)-f(\cos\theta)]$$

$$\times\frac{P_{n+1}\cos\phi)P_n(\cos\theta)-P_{n+1}(\cos\theta)P_n(\cos\phi)}{\cos\phi-\cos\theta}\sin\phi\ d\phi,$$

प्राप्त होता है जिसमें $\rho+\sigma\leqslant\theta\leqslant\pi-(\rho+\sigma),\ 0<\eta\leqslant\sigma$ क्रमागत रूपान्तर से हमें

$$B_n(\cos\theta)=D_n(\theta)+E_n(\theta), \tag{5.3}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$D_n(\theta)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\sin\theta)}}\int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta}\frac{f(\cos\phi)-f(\cos\theta)}{\sin 1/2\ (\theta-\phi)}$$

$$\times\sin\{(n+1)(\theta-\phi)\}\ .\ \sqrt{(\sin\phi)}\ d\phi$$

और स्पष्ट है कि सैंसोन[6] की ही दिशा में

$$E_n(\theta)=0(1),$$

ज्यों-ज्यों $n\to\infty$, समानरूप से जहाँ $x\ (-1+s, 1-s)$ के अन्तर्गत अर्थात् समुच्चय E में स्थित है।

$\theta-\phi=t$, रखने पर

$$D_n(\theta)=\frac{1}{\pi\sqrt{(\sin\theta)}}\int_0^{\eta}[f\{\cos(\theta-t)\}-f(\cos\theta)]$$

$$\times\frac{\sin(n+1)\,t}{\sin t/2}\ .\ \sqrt{(\sin(\theta-t))}\ dt \tag{5.4}$$

अतएव हमें (5.1)से लेकर (5.4) तक से प्राप्त होता है कि

$$S_n(x-f(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{(\sin\theta)}}\int_0^{\eta}[f\{\cos(\theta-t)\}-f(\cos\theta)]$$

$$\times \frac{\sin (n+1)t}{\sin t/2} \cdot \sqrt{(\sin (\theta-t))}\, dt + 0(1)$$

$$= O\left[\int_0^\eta [f\{\cos (\theta-t)\}-f(\cos \theta)] \frac{\sin (n+1)\, t}{\sin t/2}\, dt\right] + 0(1)$$

$$= O\left[\int_0^\eta \psi(t)\, \frac{\sin (n+1)\, t}{\sin t/2}\, dt\right] + 0(1), \text{ समानरूप से } E \text{ में} \tag{5.5}$$

अब यदि $T_n(x)$ ($\wedge$) माध्य हो श्रेणी (2·1) के आंशिक योगफलों के अनुक्रम $\{S_n(x)\}$ का तो

$$T_n(x)-f(x) = \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} [S_k(x)-f(x)]$$

$$= O\left[\int_0^\eta \left\{ \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \frac{\sin (k+1)\, t}{\sin t/2} \right\} \psi(t)\, dt\right] + 0(1)$$

$$= O\left[\int_0^\eta |\psi(t)| \cdot |N_n(t)|\, dt\right] + 0(1), \text{ समानरूप से } E \text{ में}$$

$$= O\left[\left\{\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\eta}\right\} |\psi(t)| \cdot |N_n(t)|\, dt\right] + 0(1)$$

$$= O(I_1) + O(I_2) + 0(1). \text{ समानरूप से } E \text{ में} \tag{5·6}$$

अब प्रमेय स्थापित हो जावेगी यदि हम दिखला दें कि

$$I_1 = 0(1) \text{ तथा } I_2 = 0(1), \tag{5.7}$$

ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, E में समानरूप से ।

हम सर्वप्रथम I_1 पर विचार करेंगे । (4.4) से

$$I_1 = O(n) \cdot \int_0^{1/n} |\psi(t)|\, dt$$

$$= O(n) \cdot o\left[\frac{1}{n}\, \epsilon^{k'}(1/n)\right], \text{ (3·4) से, समानरूप से } E \text{ में}$$

$$= 0\left[n \cdot \frac{1}{n} \cdot \epsilon^{k'}(1/n)\right]$$

$$= 0\left[\epsilon^{k'}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{5.8}$$

$=0(1)$, (3.2) (iii) से ज्यों-ज्यों E में समान रूप से $n \to \infty$.

अब I_2 पर विचार करने पर

$$I_2 = \int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)| \cdot |N_n(t)| \, dt$$

$$= \int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)| \cdot \left| \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,k} \cdot \frac{\sin (k+1)t}{\sin t/2} \right| dt$$

$$= \int_{1/n}^{\eta} |\psi(t)| \cdot \left| \sum_{k=o}^{n} \lambda_{n,n-k} \cdot \frac{\sin(n-k+1)\, t}{\sin t/2} \right| dt$$

$$\leqslant \int_{1/n}^{\eta} \frac{|\psi(t)|}{t} \cdot \left| Im \sum_{k=0}^{n} \triangle\lambda_{n,n-k} \cdot e^{i(n-k)t} \right| dt$$

$$= O\left[\int_{1/n}^{\eta} \frac{\psi|(t)|}{t^2} \cdot \triangle\lambda_{n,n-\tau} \, dt\right], \text{(4.2) से}$$

$$= O\left[\int_{1/n}^{\eta} \frac{|\psi(t)|}{t^2} \cdot \triangle\lambda_{n,0} \, dt\right]$$

$$= O(1/n) \cdot \int_{1/n}^{\eta} \frac{|\psi(t)|}{t^2} \, dt, \text{ (4.3) से}$$

$$= O\,(1/n) \cdot 0\left[n\epsilon^{k'}\left(\frac{1}{n}\right)\right], \text{ (3.2) से}$$

$$= 0\left[1/n \; n\epsilon^{k'}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 0\left[\epsilon^{k'}\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$=o(1)$, (3.3) (iii) से ज्यों-ज्यों E में समान रूप से $n \to \infty$ (5.9)

अब (5.6), (5·7), (5.8), (5·9) को संयुक्त करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है और इस प्रकार हमारे प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय में से एस० लाल आर्थिक सहायता (जे० आर० एफ०) प्रदान किये जाने के लिये सी० एस० आई० आर० नई दिल्ली के प्रति आभार व्यक्त करता है ।

निर्देश

1. द्विवेदी, जी० के०, **पी०-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, 1970.
2. फोआ, ए०, Boll. Univ. Mat. Ital., 1943, 5 (2), 18-27.
3. हार्डी, जी० एच०, Divergent Series, आक्सफोर्ड 1949.
4. हाब्सन, ई० डब्लू०, Proc. London. Math. Soc., 1909, 7(2), 24-29.
5. किशोर, एन० तथा होरा, जी० सी०, Indian J. Maths, 1971, 13(2), 99-110.
6. सैंसोन, जी०, Orthogonal Functions, अंग्रेजी संस्करण, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में आयताकार विस्कासी प्रत्यास्थ प्लेट का दोलन

बी० के० जोशी

गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग कालेज, बिलासपुर (म० प्र०)

[प्राप्त—नवम्बर 6, 1984]

सारांश

एक आयताकार विस्कासी प्रत्यास्थ (रीज श्रेणी) प्लेट का एकसमान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में कंपन का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है। वायट (Voigt) विस्कासी प्रत्यास्थ प्लेट में रीज विस्कासी प्रत्यास्थ प्लेट की अपेक्षा कंपन-क्षय अधिक तीव्र गति से होता है।

Abstract

On the vibrations of a visco-elastic plate in the presence of a uniform magnetic field. B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government Engineering College; Bilaspur (M. P.).

The dynamic response of a Riess type viscoelastic rectangular plate in the presence of uniform magnetic field has been studied. It has been observed that the decay of dynamic response is faster in Voigt type material than in Riess type.

सांद्रित द्रव्यमान वाली छड़ एवं प्लेट के प्रणोदित कंपनों की विवेचना होपमेन[1] एवं अन्यों[8,9]द्वारा की गयी है। यू चेन[2] द्वारा इसी प्रकार की समरूप समस्या का अध्ययन लैप्लास परिवर्त की सहायता से आवृति समीकरण प्राप्त करने के लिये किया गया। अनुप्रस्थ क्षेत्र के अन्तर्गत प्लेट के कंपनों का हल माओ एवं पाओ[3] द्वारा स्थापित किया गया। चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में विस्कासी प्रत्यास्थ पट्टी के कंपनों का अध्ययन प्रामाणिक[6] द्वारा किया गया।

प्रस्तुत नोट में एक समान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में विस्कासी प्लेट के कंपन का अध्ययन करने का प्रयत्न किया गया है। "a" एवं "b" भुजाओं वाली आयताकार प्लेट को जो अपने चारों किनारों पर एकशः आधारित हो एवं जिसके स्वेच्छ गृहीत विन्दु (a_1, b_2) पर सांद्रित द्रव्यमान M निहित हो, विचार हेतु चुना गया है।

रीज (Riess) प्रकार की विस्कासी प्रत्यास्थ कंपित प्लेट के अर्ध स्थिर चुम्बकन की कल्पना करते हुये गति के समीकरण (अवमन्दन की उपेक्षा कर) को निम्नानुसार लिखा जा सकता है

$$\left(D_0+D_1\frac{\partial}{\partial t}+D_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w+B\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)w$$

$$+\Big[2\rho h+M\,\delta(x-a_1)\,\delta(y-b_1)\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \tag{1}$$

जहाँ $2h$ प्लेट की मोटाई, ρ पदार्थ का घनत्व, D_0, D_1 और D_2 प्लेट की नमन दृढ़ता पर आधारित स्थिरांक तथा

$$B=\frac{2\gamma\,B_0^2h}{\mu_0(1+k_1'h+\gamma\,k_1h)}$$

जिसमें γ पदार्थ की चुम्बकीय प्रवृत्ति है। $\delta(x)$ को डिराक डेल्टा फलन हेतु प्रयुक्त किया गया है।

एकशः आधारित प्लेट हेतु सीमान्त प्रतिबन्ध[5]

$$\left.\begin{aligned} w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}&=0,\ x=0 \text{ तथा } x=a;\ 0\leqslant y\leqslant b,\ t>0\\ \text{और}\quad w=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}&=0,\ y=0 \text{ तथा } y=b;\ 0\leqslant x\leqslant a,\ t>0\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

प्रारम्भिक प्रतिबन्ध हेतु निम्नलिखित कल्पना की गयी है

$$\left.\begin{aligned} w&=w_1,\ t=0,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\\ \text{एवं}\quad \frac{\partial w}{\partial t}&=w_2,\ t=0,\ 0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

समीकरण का हल :

सर्वप्रथम द्वैत सीमित फूरियर साइन परिवर्त[7] का प्रयोग चर x एवं y हेतु, सीमान्त प्रतिबन्ध (2) के प्रकाश में करने पर समीकरण (1) का स्वरूप होगा

$$\left(D_2\,\alpha^2+k\right)\frac{d^2\bar{w}}{dt^2}+D_1\,\alpha^2\frac{d\bar{w}}{dt}+(D_0\,\alpha^2+B\alpha)\,\bar{w}=0 \tag{4}$$

जहाँ

$$\bar{w}\,(m,n,t)=\int_0^b\int_0^a w(x,y,t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx\,dy$$

तथा

$$\alpha=\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right) \text{ और } k=\left(2\rho h+\sin\frac{m\pi a_1}{a}\sin\frac{n\pi b_1}{b}\right) \tag{5}$$

अब चर "t" के सन्दर्भ में लैप्लास परिवर्तन लेने एवं प्रारम्भिक प्रतिबन्ध (3) का उपयोग करने पर निम्नलिखित फल प्राप्त होगा

$$\bar{\bar{w}}(m,n,s)=\frac{\bar{w}_1\left(s+\frac{D_1\,\alpha^2}{2(D_2\,\alpha^2+k)}\right)+\frac{D_1\,\alpha^2 w_1}{2(D_2\,\alpha^2+k)}+\bar{w}_2}{\left[s+\frac{D_1\,\alpha^2}{2(D_2\,\alpha^2+k)}\right]^2+\left[\frac{4(D_0\,\alpha^2+B\,\alpha)\,(D_2\,\alpha^2+k)-D^2{}_1\,\alpha^4}{4(D_2\,\alpha^2+k)^2}\right]} \tag{6}$$

जहाँ $\bar{\bar{w}}(m,n,s)$ को $\bar{w}(m,n,t)$ के लैप्लास परिवर्त एवं $\bar{w}_1(m,n)$, $\bar{w}_2(m,n)$ को क्रमशः w, (x,y) $w_2(x,y)$ के द्वैत सीमित साइन परिवर्त के रूप में प्रयुक्त किया गया है।

उपर्युक्त समीकरण (6) में प्रथम लैप्लास एवं उसके पश्चात् फूरियर प्रतिलोमन लेने पर निम्नलिखित हल की प्राप्ति होगी

$$w(x,y,t)=\frac{4}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{D_1\,\alpha^2 t}{2(D_2\,\alpha^2+k)}\right)$$

$$\left[\cos\eta t+\left\{\bar{w}_1+\frac{2\bar{w}_2(D_2\alpha^2+k)}{D_1\,\alpha^2}\right\}\sin\eta t\right].\sin\frac{m\pi x}{a}\;\sin\frac{n\pi y}{b}\Big]$$

जहाँ

$$\eta^2=\frac{4(D_0\,\alpha^2+B\,\alpha)(D_2\,\alpha^2+k)-D^2{}_1\,\alpha)}{4(D_2\,\alpha^2+k)^2} \tag{7}$$

तथा α एवं k का मान (5) द्वारा दर्शाया गया है।

यहाँ यह स्पष्ट आभासित होता है कि गतिज कंपन का क्षय चुम्बकीय क्षेत्र से अधिक प्रभावित नहीं होता। वायट (Voigt) प्रकार की विस्कासी प्रत्यास्थ प्लेट ($D_2=0$) में क्षय तीव्र गति से होता है जब कि रीज प्रकार की प्लेट में इस पर कुछ हद तक अंकुश लग जाता है।

सामान्य प्रत्यास्थ हेतु कंपन $D_1=D_2=0$ रखने पर विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

निर्देश

1. होपमेन, डब्लू० एच०, **जर्न० एप्ला० मेके० ट्रान्जेक्शन्स ए० एस० एम० ई०** 1952, **24**, 301.
2. चेन, यू० **जर्न० एप्ला० मेके० ट्रान्जेक्शन्स ए०एस० एम० ई०**, 1963, **35**, 310.
3. मून, एफ० सी० तथा पाओ, वाई० एच०, **जर्न० एप्ला० मेके०** 1968, **35**, 402.
4. रीज, ई० एल०, **आर्क० रेश० मेके० एना०**, 1961, 7, 402.
5. टिमोशेंको, एस० तथा क्रीगर, एस० डब्लू०; Theory of Plates and Shales, मेकग्राहिल 1959 पृष्ठ 83.

6. प्रमाणिक, बी॰, **इन्डि॰ जर्न॰इंजी॰ मेथ॰**, 1969, **2**, 111.

7. स्नेडान, आई॰ एन॰, Fourier Transfroms, मेकग्राहिल, 1951.

8. अम्बाराव, सी॰ एल॰, **जर्न॰ एप्ला॰ मेके॰ ट्रान्ज॰ ए॰ एस॰ एम॰ ई॰**, 1964, **31**, 550.

9. सिरकार, आर॰ **मेथ॰ एज्यूकेशन**, 1973, 7(1), 21.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1984

सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में पंचसंयोजक वैनेडियम द्वारा α-ऐमीनो अम्ल के आक्सीकरण का अणुगतिक अध्ययन

प्रेम शंकर तिवारी

उपाधि महाविद्यालय, सिरमौर

तथा

वी० के० शर्मा

शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवां

[प्राप्त—जून 18, 1984]

सारांश

सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में L-हिस्टीडीन के आक्सीकरण का अणुगतिक अध्ययन पंचसंयोजक वैनेडियम द्वारा स्थिर आयनिक शक्ति पर किया गया। अभिक्रिया की कोटि हिस्टीडीन और V(V) के सापेक्ष 1 है तथा H^+ के सापेक्ष 2 है। क्रिया पर $NaHSO_4$ और Na_2SO_4 तथा परावैद्युत स्थिरांक का भी प्रभाव देखा गया। सक्रियकरण प्राचल E, A एवं $\triangle S$ मान क्रमशः 19.52 Kcal $mole^{-1}$, 1.31×19^9 sec^{+1} और -17.06 e.u. प्राप्त हुये। प्रायोगिक तथ्यों के आधार पर क्रिया की क्रियाविधि बताई गई जिसमें हिस्टीडीन से क्रमशः विकार्बोक्सिलीकरण तथा विऐमीनीकरण क्रियाओं से अन्तिम क्रियाफल ऐल्डिहाइड प्राप्त हुआ।

Abstract

Kinetic study of α-amino acid by pentavalent vanadnium in sulphonic acid medium. *By* P. S. Tiwari, Degree College, Sirmour and V. K. Sharma, Goverment Science College, Rewa, (M. P).

Kinetics of oxidation of L-histidine by V (V) in sulphuric acid medium was studied at constant ionic strength. The reaction was found to be first order in histidine and second order in H^+. The effect of $NaHSO_4$, Na_2SO_4 and dielectric constant of the medium was also studied. Activation parameters E, A and $\triangle s$ were found to be 19.52 Kcal $mole^{-1}$, 1.31×10^9 sec^{-1} and -17.06 e. u. respectively. A

suitable mechanism involving decarboxylation of amino acids followed by deamination yielding respective aldehyde as product is proposed.

α-ऐमीनो अम्ल जीवरसायन के महत्वपूर्ण यौगिक हैं जिनके आक्सीकरण का अणुगतिक अध्ययन विभिन्न आक्सीकारकों द्वारा किया गया है[1-5]। शोध लेखों के अध्ययन से यह स्पष्ट है कि पंचसंयोजक वैनेडियम ऐमीनो अम्लों के आक्सीकरण में बहुत कम प्रयुक्त हुआ है। अतः प्रस्तुत शोधपत्र में सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में V(V) द्वारा L-हिस्टीडीन की आक्सीकरण क्रिया का अणुगतिक अध्ययन किया गया है तथा प्रायोगिक तथ्यों के आधार पर अभिक्रिया की क्रियाविधि प्रस्तुत की गई है।

प्रयोगात्मक

अमोनियम मेटावैनेडेट (रिडिल) को सल्फ्यूरिक अम्ल की उपयुक्त मात्रा में घोलकर और इस विलयन को फेरस अमोनियम सल्फेट द्वारा N-फेनिल एन्थ्रेनिलिक अम्ल सूचक का प्रयोग कर आक्सीकारक का प्रामाणिक विलयन प्राप्त किया गया। L-हिस्टीडीन का विलयन सल्फ्यूरिक अम्ल की ज्ञात सान्द्रता में बनाया गया। प्रयोग में प्रयुक्त सभी अभिकर्मक उच्चकोटि के थे।

आक्सीकारक, हिस्टीडीन और सल्फ्यूरिक अम्ल के परिकलित आयतन को स्थिर ताप पर तापस्थापी में कुछ समय रखने के बाद मिलाया गया। अभिक्रिया के वेग का निर्धारण आक्सीकारक के विलोप को फेरस अमोनियम सल्फेट द्वारा N-फेनिल एन्थ्रेनिलिक अम्ल सूचक का प्रयोग करते हुये किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

(अ) आक्सीकारक की सांद्रता का प्रभाव :

आक्सीकारक के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि एवं सांद्रता का प्रभाव ज्ञात करने के लिये क्रिया का अध्ययन ऐमीनो अम्ल एवं सल्फ्यूरिक अम्ल की स्थिर सान्द्रता पर तथा आक्सीकारक की अलग-अलग सान्द्रता पर किया गया। आयनिक शक्ति को प्रत्येक प्रयोग के लिये स्थिर रखा गया। आक्सीकारक की प्रत्येक सांद्रता पर आभासी वेग स्थिरांक का मान लगभग स्थिर आता है और log [V(V)] व t के मध्य के आलेख से स्पष्ट है कि अभिक्रिया की कोटि आक्सीकारक के सापेक्ष आभासी एकाण्विक है (सारणी 1)।

सारणी 1

[हिस्टीडीन] $\cong 2.0\times10^{-1}$M, [H_2SO_4]=6.0M, μ=6.02M, ताप=65°C

10^3M [V(V)]	20.0	10.0	12.5	7.14	6.25	5.55
10^4 k_1 min^{-1}	23.14	23.28	23.18	23.01	23.12	23.20

(ब) हिस्टीडीन की सांद्रता का प्रभाव :

ऐमीनो अम्ल की अलग-अलग सांद्रता पर क्रिया का अध्ययन किया गया। आभासी वेग स्थिरांक ऐमीनो अम्ल की सांद्रता बढ़ाने पर क्रमशः बढ़ता है परन्तु k_2 का मान लगभग स्थिर होता है (सारणी 2)।

सारणी 2

$[V(V)]=10.0\times10^{-3}M, [H_2SO_4]=6.0M, \mu=6.02M,$ ताप$=65°C.$

[हिस्टीडीन] 10^2M	40.0	33.3	20.0	10.0	5.0
$10^4k_1\ min^{-1}$	48.57	41.27	23.28	12.77	7.26
$10^2k_2\ mol^{-1}\ min^{-1}$	1.21	1.23	1.16	1.27	1.45

$\log k_1$ व $\log$ [हिस्टीडीन] के बीच आलेख खींचा जाय तो ढलान 0.91 प्राप्त होता है। इन तथ्यों से स्पष्ट है कि अभिक्रिया का वेग हिस्टीडीन के सापेक्ष 1 है। k_1^{-1} व $[\text{हिस्टीडीन}]^{-1}$ के मध्य खींचे गये आलेख में Y-अक्ष पर अंतःखंड के बनने से आक्सीकारक तथा हिस्टीडीन के बीच संकर यौगिक के निर्माण की पुष्टि होती है।

(स) क्रिया पर अम्लीयता का प्रभाव :

अभिक्रिया पर अम्लीयता के प्रभाव का अध्ययन सल्फ्यूरिक अम्ल की विभिन्न सांद्रता व ऐमीनो अम्ल एवं आक्सीकारक की स्थिर सांद्रता पर किया गया। आयनिक शक्ति को $NaClO_4$ विलयन की सहायता से स्थिर रखा गया।

सारणी 3

$[V(V)]=10.0\times10^{-3}M,$ [हिस्टीडीन]$=10.0\times10^{-2}M\ \mu=7.01M,$ ताप$=65°C$

$[H_2SO_4]$ M	5.0	5.5	6.0	6.5	7.0
$10^4k_1\ min^{-1}$	5.62	6.69	7.72	9.31	11.13
$10^5k_2\ mole^{-1}\ min^{-1}$	2.25	2.21	2.14	2.44	2.31

सारणी 3 से स्पष्ट है कि हाइड्रोजन आयन की सांद्रता बढ़ाने से आभासी वेग स्थिरांक के मान में वृद्धि होती है परन्तु k_2 $(k_2=k_1/[H^+]^2)$ का मान स्थिर रहता है। k_1 व $[H^+]^2$ के बीच के आलेख के मूल बिन्दु से निकलने से स्पष्ट है कि क्रियाविधि H^+ पर आधारित नहीं रहती अर्थात् क्रियाविधि

में H^+ सीधे भाग नहीं लेता। साथ ही साथ यह भी स्पष्ट है कि अभिक्रिया की कोटि H^+ के सापेक्ष 2 है। क्रिया हेमिट फलन का पूर्णतया पालन करती है।

क्रिया का ऐसीटिक अम्ल-जल के विभिन्न मिश्रणों में अध्ययन किया गया। क्रिया का वेग परा-वैद्युतांक की वृद्धि के साथ घटता है और यदि $\log k_1$ तथा $1/D$ के मध्य आलेख खींचा जाय तो सरल रेखा वक्र प्राप्त होता है जो क्रिया के आयन-द्विध्रुव होने का संकेत देती है।

क्रिया पर सोडियम हाइड्रोजन सल्फेट तथा सोडियम सल्फेट के प्रभाव के अध्ययन किया। $NaHSO_4$ के डालने से वेग स्थिरांक में वृद्धि होती है जबकि Na_2SO_4 के डालने से वेग स्थिरांक में कमी उपेक्षणीय है।

ताप का प्रभाव :

क्रिया का अध्ययन चार तापों पर किया गया। E, A व $\triangle S$ के मान क्रमशः 19.52 KCal mol^{-1}, 1.31×10^{9} sec^{-1} और -17.06 e.u. प्राप्त हुए।

2:4-फेनिल डाइ-नाइट्रो हाइड्रोजोन के बनने से ऐल्डिहाइड अंतिम क्रियाफल के रूप में निरूपित हुआ जिसकी पुष्टि हाइड्रोजोन के गलनांक द्वारा की गई। अभिक्रिया में 1 ग्राम अणु हिस्टीडीन, 2 ग्राम अणु वैनेडियम के साथ संयोग करते हैं।

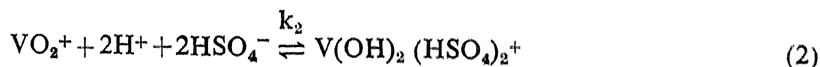
क्रियाविधि :

वैनेडियम V(V) उभयधर्मी प्रकृति का होता है तथा 0·5M अम्ल की उपस्थिति में मूल आयन VO_2^+ के रूप में रहता है। अम्ल की सांद्रता के साथ-साथ अलग-अलग स्पीसीज में प्राप्त होती है।[6-9] अम्लीयता के प्रभाव से स्पष्ट है कि वैनेडियम का सक्रिय अणु $V(OH)_2^{3+}$ है।



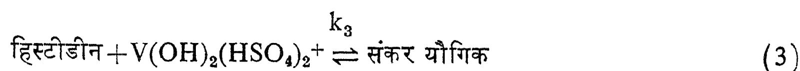
$$VO_2^+ + 2H^+ \overset{k_2}{\rightleftharpoons} V(OH)_2^{3+} \qquad (1)$$

Na_2SO_4 तथा $NaHSO_4$ का प्रभाव यह दर्शाता है कि HSO_4^-, $V(OH)_2^+$ के संयोग कर $V(OH)_2(HSO_4)_2^+$ बनाती है[10]।

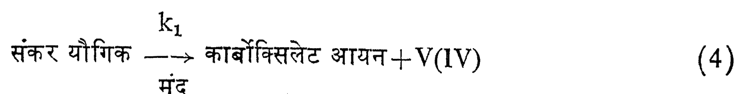


$$VO_2^+ + 2H^+ + 2HSO_4^- \overset{k_2}{\rightleftharpoons} V(OH)_2(HSO_4)_2^+ \qquad (2)$$

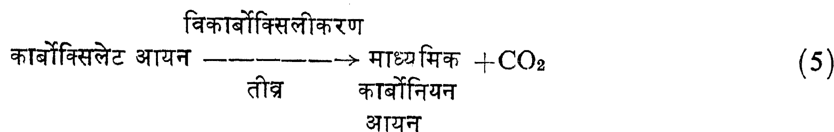
अभिक्रिया मिश्रण में एक्रायल नाइट्राइल डालने पर अवक्षेप के न मिलने से स्पष्ट है कि अभिक्रिया में मुक्त मूलक नहीं बनता। वैनेडियम की उपर्युक्त स्पीसीज इलेक्ट्रोफिलिक प्रकृति की होती है जो ऐमीनो अम्ल में उपस्थित न्यूक्लियोफिलिक नाइट्रोजन व कार्बोक्सिलिक समूह के आक्सीजन के साथ संयोग कर संकर यौगिक का निर्माण करती है। वेग निर्धारण वाले पद में यह संकर यौगिक अपघटित होकर माध्यमिक आयनों का निर्माण करता है जो अंतिम क्रियाफल देते हैं।



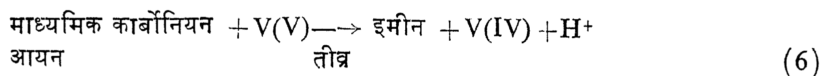
$$\text{हिस्टीडीन} + V(OH)_2(HSO_4)_2^+ \overset{k_3}{\rightleftharpoons} \text{संकर यौगिक} \tag{3}$$



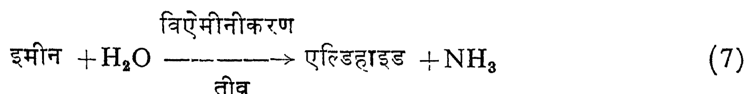
$$\text{संकर यौगिक} \xrightarrow[\text{मंद}]{k_1} \text{कार्बोक्सिलेट आयन} + V(IV) \tag{4}$$



$$\text{कार्बोक्सिलेट आयन} \xrightarrow[\text{तीव्र}]{\text{विकार्बोक्सिलीकरण}} \text{माध्यमिक कार्बोनियन आयन} + CO_2 \tag{5}$$



$$\text{माध्यमिक कार्बोनियन आयन} + V(V) \xrightarrow[\text{तीव्र}]{} \text{इमीन} + V(IV) + H^+ \tag{6}$$



$$\text{इमीन} + H_2O \xrightarrow[\text{तीव्र}]{\text{विऐमीनीकरण}} \text{एल्डिहाइड} + NH_3 \tag{7}$$

उपर्युक्त पदों के आधार पर क्रिया का गति समीकरण निम्नवत् होगा

$$k_{obs} = \frac{k_2k_3k_1\ [\text{हिस्टीडीन}]\ [H^+]^2\ [HSO^-_4]^2}{1 + k_2\ [H^+]^2\ [HSO_4^-]^2 + k_2k_3\ [H^+]^1\ [HSO_4^-]^2\ [\text{हिस्टीडीन}]} \tag{8}$$

पद (8) सभी प्रायोगिक तथ्यों को निरूपित करता है। उपर्युक्त क्रिया के लिये सक्रियण ऊर्जा का मान C–C विदलन की पुष्टि करता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रस्तुत कार्य में आर्थिक सहायता देने के लिये लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के आभारी हैं।

निर्देश

1. रेड्डी, के० बी०, सेथूराम वी० तथा नवनीत राव, टी०, **इन्डि० जर्न० केमेस्ट्री**, 1981, **20A**, 395.
2. शेख, आर० ए० तथा वाटर्स, डब्ल्यू० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1970, 988.
3. गोस्वामी, के० बी०, चंद्रा, जी० तथा श्रीवास्तव, एस० एन०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1981, **58**, 252.
4. श्रीवास्तव, वी० के०, श्रीवास्तव, के० के०, श्रीवास्तव, एम० एन० तथा सक्सेना, बी० बी० एल०, **इन्डि० जर्न० केमिस्ट्री**, 1980, **19A**, 1011.

5. बेग, आई०, कमालुद्दीन, एम० ए०, **अक्टा० किम० एकेड० साइंस हन्ग०**, 1975, **86**, 65.

6. वाटर्स, डब्ल्यू० ए० तथा लिटलर, जे० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1959, 3014, 4046.

7. जोन्स,जे० आर० तथा वाटर्स, डब्ल्यू० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1963, 352.

8. बकोरे, जी० वी० तथा भार्गव, एन० सी०, **जेड० फिजिक० केम०** (लिपजिक) 1966, **232**, 140.

9. शंकर, आर० तथा जोशी, एस० एन०, **इन्डि० जर्न० केमेस्ट्री**, 1963, **1**, 289.

10. मेहरोत्रा, आर० एन०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1968, 642.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

दलहन एवं तिलहन के तेल तथा वसीय अम्लों का तुलनात्मक पौष्टिक विश्लेषण

चन्द्र प्रकाश अवस्थी

खाद्य प्रौद्योगिक विभाग
नरेन्द्र देव कृषि एवं प्रौद्योगिक विश्वविद्यालय,
कुमारगंज, फैजाबाद (उ० प्र०)

[प्राप्त—नवम्बर 5, 1984]

सारांश

सरसों, सोयाबीन तथा चने की संस्तुत प्रजातियों के तेल तथा वसीय अम्लों का तुलनात्मक अध्ययन किया गया। सरसों, सोयाबीन तथा चने में 36.5%, 21.6% तथा 6.8% तेल पाया गया। यद्यपि चने के तेल में तेल की प्रतिशत मात्रा तुलनात्मक रूप से सबसे कम थी फिर भी मानव पोषण के लिये आवश्यक असंतृप्त वसीय अम्ल-लिनोलिक तथा लिनोलिनिक-सोयाबीन तथा सरसों से श्रेष्ठतर थे। इससे यह विदित होता है कि चना केवल प्रोटीन का ही नहीं वरन् पोषण सम्बन्धी वसीय अम्लों का भी अच्छा स्रोत है।

Abstract

A comparative nutritional study on the oil and fatty acid contents in legumes and oilseeds. *By* C. P. Awasthi, Department of Food Technology, N.D. University of Agriculture of Technology, Kumar Ganj, Faizabad, U. P.

A comparative study on the oil and fatty acid composition of recommended variety of mustard, soybean and chickpea was carried out. Oil content was found to vary 6.8%, 21.6% and 36.5% in chickpea, soybean and mustard respectively. Although chickpea had lowest oil percentage, however, the essential fatty acids e. g. linoleic and linolenic acid content was superior than mustard and soybean. This indicates that chickpea or gram is not only a good source of protein but it has also a fairly good amount of nutritionally essential fatty acids required in a balanced diet.

कृषि उत्पादन के साथ-साथ पोषण एवं स्वास्थ्य के क्षेत्र में दलहन एवं तिलहन का देश में प्रमुख स्थान है। देश के विभिन्न भागों में इनका प्रयोग विभिन्न प्रकार की दालों तथा तिलहनों की पैदावार पर निर्भर करता है। इन फसलों में तेल एवं वसीय अम्लों की मात्रा भिन्न-भिन्न होती है। मानव पोषण में असंतृप्त वसीय अम्ल आवश्यक हैं फिर भी कुछ तिलहनी फसलों में स्वास्थ्य के लिये अहितकर वसीय अम्ल (इरूसिक अम्ल) पाये जाते हैं।[1] उत्तर प्रदेश में सरसों का तेल तथा कुछ भागों में सोयाबीन का तेल खाने के काम में लाया जाता है जबकि शाकाहारी भोजन में चना मुख्यतया प्रोटीन के प्रमुख स्रोत के रूप में प्रयोग किया जाता है।[2] चूंकि दलहनों में चने में (सोयाबीन को छोड़कर) सर्वाधिक तेल पाया जाता है और इसमें उपस्थित वसीय अम्लों के विषय में बहुत ही कम साहित्य उपलब्ध है, अतः प्रस्तुत अध्ययन इस सम्बन्ध में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के उद्देश्य से सम्पन्न किया गया।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये चना, सोयाबीन तथा सरसों की संस्तुत प्रजातियों के बीज से तेल का निष्कर्षण (साक्सलेट विधि) ए० ओ० ए० सी०-1970[3] का अनुगमन करते हुये किया गया। तेल में उपलब्ध वसीय अम्लों का निष्कर्षण एथेनॉलीकृत पोटैशियम हाइड्राक्साइड द्वारा तथा उनका निर्धारण गैस-द्रव क्रोमेटोग्राफी (Gas-liquid chromatography) विधि द्वारा राष्ट्रीय पोषण संस्थान, हैदराबाद में किया गया[4]। वसीय अम्ल के विश्लेषण के समय गैस-द्रव-क्रोमेटोग्राफ (वेरीयन माडल 3700) में प्रयुक्त उपकरण सम्बन्धी तकनीकी जानकारी इस प्रकार थी—गैस का प्रवाह दर-नाइट्रोजन (25 मिली० एल० मिनट), हाइड्रोजन (20 मिली० प्रति मिनट), नलिका का ताप 180° सें०, इन्जेक्टर का ताप-220° सें० तथा सूचक का ताप-229° सें०, ऐटीनुयेशन-60 एवं चित्र प्रवाह-1 सेंटीमीटर/मिनट। इसके साथ ही साथ प्रोटीन की मात्रा भी बाइयूरेट विधि द्वारा ज्ञात की गयी[5]।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1

दलहन एवं तिलहन में तेल तथा वसीय अम्लों का विश्लेषण

प्रयुक्त दलहन/ तिलहन	प्रोटीन %	तेल %	वसीय अम्लों की प्रतिशत उपलब्धता पामिटिक 15.0	स्टियरिक 18.0	ओलिक 18.1	लिनोलिक 18.2	लिनोलिनिक 18.3	इरुसिक 22.1
सरसों	20.5	36.5	2.23	2.63	10.74	16.83	15.33	49.50
सोयाबीन	43.6	21.6	14.60	3.72	19.58	54.22	6.80	—
चना	19.30	6.8	13.45	1.03	16.65	53.96	14.18	—

विश्लेषण से प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिये गये हैं। इससे स्पष्ट है कि सरसों, सोयाबीन तथा चने में प्रोटीन 20.5%, 43.6% तथा 19.3% तथा तेल की मात्रा क्रमश: 36.5%, 21.6% और 6.8% पायी गयी। संतृप्त वसीय अम्ल जैसे पामिटिक 13.45, 14.60%, 2.23 प्रतिशत और स्टियरिक अम्ल 1.03%, 3.72% तथा 2.63% क्रमश: चने, सोयाबीन और सरसों में पाये गये। ओलिक, लिनोलिक तथा लिनोलिनिक नामक असंतृप्त वसीय अम्लों की मात्रा चने में 16.65%, 53.96% तथा 14.18%, सोयाबीन में, 19.58%, 54.22% तथा 6.80% एवं सरसों में 10.74%, 16.83% और 15.33% प्राप्त हुई। मानव पोषण के लिये अहितकर इरूसिक वसीय अम्ल केवल सरसों में (49.5%) पाया गया।

यद्यपि चने में तुलनात्मक रूप से तेल की मात्रा कम थी फिर भी पोषण की दृष्टि से अत्यावश्यक वसीय अम्ल (18.3) की उपलब्धि सोयाबीन तथा सरसों की अपेक्षा अधिक पायी गयी।

आँकड़ों से यह विदित होता है कि चना केवल प्रोटीन का ही नहीं, वरन् अन्तर्निहित वसा तथा असंतृप्त वसीय अम्लों का भी प्रचुर स्रोत है, जो कुपोषण की विभीषिका के निदान के लिये पौष्टिक आहार का सस्ता, सुगम एवं आवश्यक अवयव है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० कीर्ति सिंह, कृषि अधिष्ठाता, कृषि महाविद्यालय, नरेन्द्र देव कृषि एवं प्रोद्यौगिक वि० वि०, फैजाबाद, डा० पी० श्रीनिवास राव, अनुसंधान अधिकारी, वसा अनुभाग, डा० एम० मोहन राम, उप-निदेशक तथा डा० वी० एस० नरसिंह राव, निदेशक, राष्ट्रीय पोषण संस्थान, हैदराबाद का आभारी है जिन्होंने प्रस्तुत अध्ययन के लिये प्रेरणा प्रदान की, आवश्यक सुविधायें उपलब्ध कराई तथा परामर्श दिया।

निर्देश

1. शिनोलकर, आई० एस०, तिलक, टी० वी० जी,० कृष्णमचारी, के० ए० वी० आर० तथा नागराजन, वी०, **प्रोसी० रेपसीड एण्ड मस्टर्ड**, 1979, 84-86.

2. गोपालन, सी०, रामास्वामी, बी० वी० तथा बाल-सुब्रह्मणम्, एस० सी०, **न्यूट्रीटिव वैल्यू आफ इंडियन फूड्स, राष्ट्रीय पोषण संस्थान** हैदराबाद, 1982.

3. ए० ओ० ए० सी०, Official Methods of Analysis, नवाँ संस्करण, वाशिंग्टन, डी० सी० 1970.

4. याशो, के० तथा होशी, एम०, Methods of Neurochemistry, तृतीय संस्करण, आर० फ्राइड, न्यूयार्क, एकेडिमिक प्रेस, 1972.

5. विलियम्स, पी० सी०, J. Sci. Food and Agric. 1961, **12**, 59.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

H-फलन वाले कतिपय द्विगुण समाकल

अशोक कुमार रोंघे

एस० एस० एल० जैन हायर सेकंडरी स्कूल विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त—नवम्बर 26, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में H-फलन वाले द्विगुण समाकलन का मूल्यांकन किया गया है। कुछ ज्ञात तथा अज्ञात रोचक परिणाम भी दिये गये हैं।

Abstract

Double integrals involving *H*-function of one variable. *By* Ashok Kumar Ronghe, S. S. L. Jain Higher Secondary School, Vidisha (M. P.).

In this paper double integrals involving H-function of one variable have been evaluated. Few interesting known as well as uuknown results have also been given.

1. प्रस्तावना

फाक्स[3] द्वारा प्रचारित H-फलन को निम्नलिखित विधि से परिभाषित और अंकित किया जावेगा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}1(a_j,\ e_j)_p\\ 1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right.\right]=(2\pi i)^{-1}\int_L \theta\ (s)\ ds, \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\ (b_j-f_js)\ \prod_{j=1}^{n}\Gamma\ (1-a_j+e_js)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma\ (1-b_j+f_js)\ \prod_{j=n+1}^{p}\Gamma\ (a_j-e_js)}, \tag{1.2}$$

रिक्त गुणनफल है जिसे इकाई मान लिया जाता है। $0 \leqslant m \leqslant q$, $0 \leqslant n \leqslant p$ एवं प्राचल ऐसे हैं कि $\Gamma(b_j - f_j s)$, $j=1 \ldots m$ के पोल $\Gamma(1-a_k+e_k s)$, $k=1 \ldots n$, $i=\sqrt{-1}$, के किसी पोल से सम्पाती हैं तथा L एक उपयुक्त कंटूर है।

ब्राक्समा[2] ने यह सिद्ध किया है कि समाकल (1.1) परम अभिसारी होता है

जब $\theta > 0$, $|\arg z| < 1/2\theta\pi$

जहाँ
$$\theta = \sum_{j=1}^{n} e_j - \sum_{j=n+1}^{p} e_j + \sum_{j=1}^{m} f_j - \sum_{j=m+1}^{q} f_j$$

विस्तृत विवरण के लिये देखें ब्राक्समा[4]।

2. वांछित परिणाम

प्रस्तुत प्रपत्र में हमें निम्नलिखित परिणामों एवं गुणों की आवश्यकता होगी—

मैकराबर्ट[5]

$$\int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1}\, d\theta = e^{1/2 i\pi\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \tag{2.1}$$

जहाँ $Re(\alpha)>0$, $Re(\beta)>0$,

शर्मा[6]

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} [ax+b(1-x)]^{-\alpha-\beta}\, {}_2F_1\left[c,d:\alpha:\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right] dx$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta-c-d)}{a^{\alpha}\, b^{\beta}\, \Gamma(\alpha+\beta-c)\, \Gamma(\alpha+\beta-d)} \tag{2.2}$$

जहाँ $Re\,(\alpha)>0$, $Re\,(\beta)>0$, $Re\,(\alpha+\beta-c-d)>0$, a तथा b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0 \leqslant x \leqslant 1$ शून्य नहीं है।

3. प्रमुख समाकल

इस प्रपत्र में H-फलन तथा हाइपरज्यामितीय फलन वाले द्विगुण समाकलों का मूल्यांकन किया गया है।

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos)^{\beta-1} x^{\gamma-1} (1-x)^{\delta-1} [ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$
$${}_2F_1\left[c.d.\alpha:\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right].$$

$$H_{p,q}^{m,n}\left[ze^{i(\lambda+\mu)\theta}(\sin\theta)^{\lambda}(\cos\theta)^{\mu}(ax)^{\mu}[b(1-x)]^{\nu}[ax+b(1-x)]^{-x-\nu}\left|\begin{matrix}1(a_j,e_j)_p\\1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right.\right]d\theta.\,dx.$$

$$=\frac{e^{1/2i\pi a}}{a^{\gamma}b^{\delta}}H_{p+5,q+3}^{m,n+5}$$

$$\left[z^{1/2i\pi\lambda}\left|\begin{matrix}(1-\alpha,\lambda)(1-\beta,\mu)(1-\gamma,u)(1-\delta,v)(1-\gamma-\delta+c+d,u+v)(a_j,,e_j)_p\\1(b_j,f_j)_q,(1-\alpha--\beta,\lambda+\mu)(1-\gamma-\delta+c,u+v)(1-\gamma-\delta+d,u+v)\end{matrix}\right.\right] \quad (3.1)$$

प्रतिबन्ध $\lambda,\ \mu,\ u,\ v,\ >0,$

$Re\ [\alpha+\lambda\ (b_j/f_j)]>0,$

$Re\ [\beta+\mu\ (b_j/f_j)]>0,$

$Re\ [\gamma+u\ (b_j/f_j)]>0,$

$Re\ [\delta+v\ (b_j/f_j)]>0,$

$j=1,\ \ldots\ m,\ \theta>0$

$|\arg z|<1/2\ \theta\ \pi,$

a और b शून्येतर अचर हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$ जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

उपपत्ति

(3.1) को सिद्ध करने के लिये हम (3.1) के वाम पक्ष को I द्वारा अंकित करते हैं। इसे (1.1) की सहायता से निम्न प्रकार व्यंजित करते हैं—

$$I=\int_0^1\int_0^{\pi/2}e^{i(\alpha+\beta)\theta}(\sin\theta)^{\alpha-1}(\cos\theta)^{\beta-1}x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}[ax+b(1-x)^{-\gamma-\delta}$$
$$_2F_1\ [c.d:\alpha:ax/ax+b(1-x)]$$
$$\times(2\pi i)^{-1}\left\{\int_L\theta(s)z^s e^{i(\lambda+\mu)\theta s}(\sin\theta)^{\lambda s}(\cos\theta)^{\mu s}x(ax)^{us}x[b(1-x)]^{vs}\right.$$
$$\left.\left[[ax+b(1-x)]^{-us-vs}ds\right]d\theta\,dx\right\} \quad (3.2)$$

समाकलन के क्रम को यह मानते हुये कि इस प्रक्रिया में सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी है, बदलते हैं तथा थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें

$$I=a^u b^v (2\pi i)^{-1} \int_L \theta(s) a^{us} b^{vs} z^s \left\{ \int_0^1 x^{\gamma+us-1}.(1-x)^{\delta+vs-1}. \right.$$

$$\left[ax+b(1-x)\right]^{-\delta-\gamma-us-vs} {}_2F_1 \left[c.d : a : ax/ax+b(1-x)\right] dx \Big\}$$

$$\times \left\{ \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta+\lambda s+\mu s)\theta} (\sin\theta)^{\alpha+\lambda s-1} (\cos\theta)^{\beta+\mu s-1} d\theta \right\} ds \qquad (3.3)$$

प्राप्त होता है ।

(2.1) तथा (2.2) परिणामों की सहायता से दो आन्तरिक समाकलों का मान निकालते हैं तथा सरलीकरण के पश्चात् प्राप्त परिणाम की विवेचना में (1.1) की सहायता लेने पर हमें (3.1) की प्राप्त होती है ।

विशिष्ट दशाएं :

हमारे प्रमुख समाकलन से कई विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं ।

1. यदि परिणाम 3.1 में हम $d=\alpha$ और $c=0$, रखें तो सोनी[7] द्वारा सिद्ध किया प्रथम परिणाम (3.1) प्राप्त होता है ।

2. यदि परिणाम (3.1) में हम $d=\alpha$ तथा $c=0$ और $u=0$ रखें तो सोनी[7] द्वारा सिद्ध किया दूसरा परिणाम (3.2) प्राप्त होता है ।

3. यदि परिणाम (3.1) में $u=0$, $v=0$, $c=0$, $d=\alpha$, रखें तो अनन्दानी[1] द्वारा सिद्ध किया गया परिणाम प्राप्त होता है ।

4. यदि परिणाम (3.1) में हम $d=\alpha$ तथा $c=0.u=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$ रखें तो हमें कल्ला[4] द्वारा प्राप्त परिणाम प्राप्त होता है ।

5. यदि परिणाम (3.1) में $\mu=-\lambda$ रखें तो निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है—

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} e^{i(\alpha+\beta)\theta} (\sin\theta)^{\alpha-1} (\cos\theta)^{\beta-1} x^{\gamma-1} (1-x)^{\delta-1} [ax+b(1-x)]^{-\gamma-\delta}$$

$$\cdot {}_2F_1 [c.d.\alpha : ax/ax+b(1-x)]$$

$$H^{m.n}_{p.q} \left[z(\tan\theta)^{\lambda} (ax)^u [b(1-x)]^v [ax+b(1-x)]^{-u-v} \middle| \begin{matrix} 1(a_j, e)_{jp} \\ 1(b_j, f_j) \end{matrix} \right] d\theta dx$$

$$= \frac{e^{1/2 i\pi\alpha}}{a^\gamma b^\delta \Gamma(\alpha+\beta)} H^{m,n+4}_{p+2,q+2}$$

$$\left[z\,e^{1/2i\pi\lambda} \middle| \begin{matrix} (1-\alpha,\lambda)\,(1-\gamma,u)(1-\delta,v)(1-\gamma-\delta+c+d,u+v)(a_j.ej)_p \\ 1(b_j,f_j)\,(1-\gamma-\delta+c,u+v)(1-\gamma-\delta+d,u+v) \end{matrix} \right]$$

जहाँ $u, v>0$, $Re\,[\gamma+u(b_j/f_j)]>0$,

$Re\,[\delta+v\,(b_j/f_j)]>0$,

$Re\,[\alpha+\lambda(b_j/f_j)]>0, j=1, ..., m$,

$Re\,[\beta-\lambda(a_j-1/e_j)]>0, j=1, ..., n$, $|\arg z|<1/\theta\pi$,

जहाँ θ वही है जैसा कि (3.1) में है, a और b शून्येतर अचर हैं तथा व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देश के लिये लेखक प्रो० ए० बी० डाँगे तथा डा०पी० अनन्दानी के प्रति आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र के लेखन में सहायता पहुँचायी।

निर्देश

1. अनन्दानी, पी०, Rend. Circ. Math. Portermo, (2), **20**, 70-82.

2. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Composite, Math. 1904, **15**, 293-341.

3. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math, Soc, 1961, **98**, 395-421.

4. कल्ला, एस० एल०, A. M. M. De. Cromez Lopez: Univ. Nac. Tucuman. Argentina, Rev. Ser. A. 1972,**22**, 165-170.

5. मैकराबर्ट, टी० एम०, Math, Ann. 1960-61, **142**, 450-452.

6. शर्मा, बी० एल०, Quar. J. of Vikram University, 1965.

7. सोनी, शान्ति, एस०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1982, **25**, 183-87.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

क्लोरेमीन-टी द्वारा मेथिल ऐमीन के उपचयन की अणुगतिकी तथा क्रियापथ

एस० एन० कक्कड़

माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

तथा

एम० एस० वर्मा

रसायन अध्ययनशाला, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—जुलाई 14, 1984]

सारांश

Abstract

क्लोरेमीन-टी द्वारा मेथिल ऐमीन के उपचयन की अणुगतिकी का अन्वेषण किया गया है। प्रत्येक अभिकारक के सापेक्ष अभिक्रिया की कोटि 1 पाई गई। अभिक्रिया की दर क्लोरेमीन-टी से प्रभावित नहीं होती है, परन्तु मेथिल ऐमीन की सान्द्रता के अनुलोमानुपाती पाई गई। उदासीन लवण की सान्द्रता का नगण्य प्रभाव पड़ता है जबकि क्षार का थोड़ा सा ऋणात्मक तथा अम्ल का थोड़ा सा धनात्मक प्रभाव होता है। उष्मागतिक प्राचल परिकलित किये गये हैं। प्रयोगात्मक आँकड़ों के आधार पर क्रियापथ प्रस्तावित किया गया है जिसमें क्लोरेमीन-टी तथा मेथिल ऐमीन एक सक्रियित संकुल बनाते हैं।

Kinetics and mechanism of the oxidation of methyl amine by chloramine-T. *By* S. N. Kakkar, Madhav Science College, Ujjain and M. S. Verma, School of Studies in Chemistry, Vikram University, Ujjain.

The kinetics of the oxidation of methyl amine by chloramine-T has been investigated. The reaction has been found to be first order with respect to each reactant. The rate is independent of the concentration of chloramine-T and it is directly proportional to the amine concentration. The effect of neutral salt concentration is negligible while that of alkali is slightly negative and of the acids is slighty positive.

The thermodynamic parameters have been calculated. On the basis of experimental data, mechanism involving the formation of activated complex between chloramine-T and methyl amine has been proposed.

क्लोरेमीन-टी अर्थात् N-क्लोरोटोल्वीन-p-सल्फोनामाइड के सोडियम लवण का विस्तृत उपयोग बहुत सारे कार्बनिक तथा अकार्बनिक पदार्थों के क्षारीय तथा अम्लीय माध्यम में उपचयनमितीय निर्धारण में होता रहा है[1–3]। इन उपचयनों में से कुछ, जैसे-ग्लिसरोल[4], हेक्सासायनोफैरेट[5], 2-हाइड्राक्सी अम्ल[6] तथा ऐलीफेटिक ऐल्डिहाइड, ऐमीनो अम्ल एवं ऐल्डोजों[7] के उपचयन का अणुगतिक अध्ययन हो चुका है। प्रस्तुत शोधपत्र में क्लोरेमीन-टी द्वारा मेथिल ऐमीन के उपचयन का अन्वेषण किया गया है।

प्रयोगात्मक

उपयोग में लाये गये सभी पदार्थ वैश्लेषिक कोटि के या उसके समकक्ष स्तर के थे। विलयनों को 22 या 32°±0.02°C के ताप पर तापस्थापी में रखा गया। अभिक्रिया मिश्रण के 5 मिली० को उचित समयान्तराल पर निकाला गया। अभिक्रिया की प्रगति अनभिकृत क्लोरेमीन-टी को आयोडोमिति से ज्ञात करके निकाली गई। इसके लिये बॉस तथा लॉम्ब का स्पेक्ट्रानिक-20 स्पेक्ट्रोफोटोमीटर काम में लाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

आक्सीकारक तथा अपचायक क्रियाधार की विभिन्न सान्द्रताओं के लिये $\log_{10}$ (a-x) के विरुद्ध काल के आलेखों से परिकलित आभासी प्रथम कोटि दर नियतांक, k_1, सारणी 1 में दिये गये हैं। प्रत्येक प्रयोग के लिये ऐमीन की सान्द्रता आधिक्य में थी।

सारणी 1

ताप=32°C

[ऐमीन] M	[क्लोरेमीन-टी]	$k_1 \times 10^2$ min^{-1}
1·00	0·01	2·002
0·3	0·01	1·689
0·4	0·01	0·7829
0·4	0·005	0·7751
0·4	0·02	0·7804

आभासी प्रथम कोटि दर नियतांक, k_1, पर क्लोरेमीन-टी सान्द्रता का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है, लेकिन ऐमीन की सान्द्रता के अनुलोमानुपाती है।

यह एक सुविदित तथ्य है कि क्लोरेमीन-टी अम्लीय तथा क्षारीय माध्यम में जल-अपघटित होकर विभिन्न उत्पाद देता है जो अन्य क्रियाधारों के उपचयन[8] में समर्थ होते हैं। इसीलिये दर निर्धारक पद में उपचायक स्पीसीज की प्रकृति का अनुमान लगाने के उद्देश्य से HCl, $HClO_4$ तथा NaOH की विभिन्न सान्द्रताओं की उपस्थिति में दर नियतांक परिकलित किये गये हैं (देखिये सारणी 2)। इस सारणी के आँकड़े प्रदर्शित करते हैं कि उपचयन की दर क्षार की उपस्थिति में कम हो जाती है जबकि अम्ल की उपस्थिति में बढ़ जाती है।

सारणी 2

[ऐमीन]=0.40M [क्लोरेमीन-टी]=0.01M ताप=32°C

NaOH M	$k_1 \times 10^2$ min^{-1}	HCl M	$k_1 \times 10^2$ min^{-1}	$HClO_4$ M	$k_1 \times 10^2$ min^{-1}
—	0·7829	—	0·7829	—	0·7829
0·01	0·4030	0·002	1·101	0·001	1·005
0·02	0·3583	0·004	1·506	0·005	1·618
0·05	0·3224	0·010	2·399	0·009	2·032

उदासीन लवण की आयनिक शक्ति का प्रभाव देखने के लिये Na_2SO_4 तथा K_2SO_4 की विभिन्न सान्द्रताओं की उपस्थिति में उपचयन का अध्ययन किया गया है (सारणी 3)।

सारणी 3

[ऐमीन]=0.4M [क्लोरेमीन-टी]=0.005M ताप=32°C

लवण का नाम	सान्द्रता	$k_1 \times 10^2$ min^{-1}
Na_2SO_4	0·01	0·7751
Na_2SO_4	0·02	0·7680
Na_2SO_4	0·04	0·7800
K_2SO_4	0·005	0·7599
K_2SO_4	0·015	0·7725
K_2SO_4	0·025	0·7701

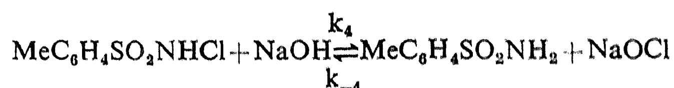
सारणी 3 के दर नियतांक के मान स्पष्टतः संकेत देते हैं कि उदासीन लवण की सान्द्रता का पविरर्तन उपचयन की दर पर कोई उल्लेखनीय प्रभाव नहीं डालता है।

उष्मागतिक प्राचलों के मान निम्नांकित प्राप्त हुए—विशिष्ट दर नियतांक 1.957 liters $mole^{-1}$ या 0.8560 min^{-1}, ताप गुणांक 2.29, सक्रियण की एनट्रॉपी 15.22 cal $mole^{-1}$, एन्ट्रापी गुणांक 1.004×10^{-6}, आवृति गुणांक 1.752×10^{-7} litres $mole^{-1}$ sec^{-1}.

सभी प्रयोगात्मक सेटों में, मेथिल ऐमीन (जो अत्यधिक क्षारीय है) की सान्द्रता अधिकता में ली गई है जिससे पी-एच हमेशा 11.5 से अधिक रहे। इस तरह क्लोरेमीन-टी निम्नांकित अभिक्रियाओं के अनुसार जल-अपघटित[8] हो जायेगा।



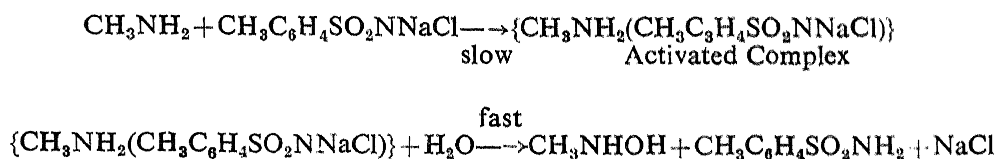
$$MeC_6H_4SO_2NNaCl + H_2O \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} MeC_6H_4SO_2NHCl + NaOH$$



$$MeC_6H_4SO_2NHCl + NaOH \underset{k_{-4}}{\overset{k_4}{\rightleftharpoons}} MeC_6H_4SO_2NH_2 + NaOCl$$

इस प्रकार विलयन में तीन उपचायक स्पीसीज अर्थात् क्लोरेमीन-टी, N-क्लोरोटोल्वीन-p-सल्फोनामाइड तथा हाइपोक्लोराइट होंगी।

N-क्लोरोटोल्वीन-p-सल्फोनामाइड एक प्रबल अम्ल है, अत: क्षारीय माध्यम में नगण्य मात्रा में उपस्थित रहेगा। सक्रिय उपचायक स्पीसीज के रूप में OCl^- आयन की सम्भावना को भी निरस्त किया जा सकता है क्योंकि इसका निर्माण पद k_4 द्वारा नियंत्रित है, जो क्षार से उत्प्रेरित है। प्रेक्षित परिणाम उपचयन की दर पर NaOH का मंदक प्रभाव प्रदर्शित करते हैं। वेल तथा मॉरिस[9] ने HOCl तथा मेथिल ऐमीन की अभिक्रिया द्वारा क्लोरेमीनों के निर्माण की अणुगतिकी का अध्ययन करते समय प्रेक्षित किया कि अभिक्रिया पी-एच पर बहुत अधिक निर्भर करती है तथा दर नियतांक पी-एच को 6 से 12.5 तक बढ़ाने पर निरंतर घटता जाता है। क्लोरेमीन-टी के गुणधर्म काफी हद तक हाइपोक्लोरस अम्ल[10] के समान हैं। प्रस्तुत अन्वेषण में प्रारम्भिक पी-एच 11.5 है अत: तनु अम्ल डालने से त्वरक प्रभाव तथा तनु क्षार डालने से मन्दक प्रभाव उक्त लेखकों के प्रेक्षणों के अनुसार है। मेथिल ऐमीन के उपचयन पर उदासीन लवण का प्रभाव भी संकेत करता है कि दर निर्धारक पद क्लोरेमीन-टी तथा मेथिल ऐमीन के मध्य है। प्रस्तावित क्रियापथ निम्न प्रकार है :



$$CH_3NH_2 + CH_3C_6H_4SO_2NNaCl \xrightarrow[slow]{} \{CH_3NH_2(CH_3C_3H_4SO_2NNaCl)\}$$ Activated Complex

$$\{CH_3NH_2(CH_3C_6H_4SO_2NNaCl)\} + H_2O \xrightarrow{fast} CH_3NHOH + CH_3C_6H_4SO_2NH_2 + NaCl$$

दर नियम निम्न प्रकार दिया जा सकता है :

$$-\frac{d}{dt}\,[\text{क्लोरेमीन-टी}] = k\,[\text{क्लोरेमीन-टी}]\,[\text{ऐमीन}]$$

यह प्रदर्शित करता है कि अभिक्रिया को प्रत्येक अभिकारक के सापेक्ष प्रथम कोटि का होना चाहिये। वास्तव में ऐसा ही प्रेक्षित किया गया है। स्टॉइकियोमीट्रिक परिकलन भी इसी प्रकार के निष्कर्ष की ओर संकेत करता है। बिन्दु संपरीक्षण विश्लेषण भी ऑक्जीम की उपस्थिति उपचयन उत्पाद के रूप में प्रदर्शित करता है।

निर्देश

1. स्मूलैक, डब्ल्यू० डब्ल्यू०, **कैमि०**, 1955, **4**, 505.
2. बोर्का, ए०, Chemie, 1958, **10,** 121.
3. बेवर, ए० तथा वैलिक, एफ०, *Z.* Physik Chem., 1968, **238,** 353.
4. अग्रवाल, एम० सी० तथा मुशरान, एस० पी०, **जर्न० फिजि० केमि०,** 1971, **75**, 838.
5. मुशरान, एस० पी०, अग्रवाल, एम० सी० तथा प्रसाद, बी०, **जर्न० केमि० सोसा०,** 1971, 1712.
6. अग्रवाल, एम० सी० तथा मुशरान, एस० पी०, Z. Naturforsch., 1972, **276**, 401.
7. प्राइड, एल० पी० तथा सोपर, एस० जी०, **जर्न० केमि० सोसा०,** 1931, 1510.
8. दीतजेल, आर० तथा ताउफेल, के०, Apoth. *Z*tg., 1929, **34,** 989.
9. वेल, सी० तथा मॉरिस, जे०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०,** 1949, **71**, 1664.
10. फाइगल तथा सिल्वा, Analyst, 1957, **82**, 583.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

विस्तीर्ण हुकेल सिद्धान्त के द्वारा परमैंगनेट आयन के आणुक कक्षक की परिगणना

आर० के० सिंह, सुषमा रानी तथा सीताराम त्रिपाठी
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 21, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में विस्तीर्ण हुकेल जैसे अर्धआनुभविक MO सिद्धान्त के द्वारा MnO_4^- की इलेक्ट्रानीय मूल अवस्था की परिगणना की गई है।

Abstract

Molecular orbital calculation of permanganate ion by extended Huckel theory. *By* R. K. Singh, Sushma Rani and S. R. Tripathi, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

In the present paper the electronic ground state of MnO_4^- has been calculated by a semi-empirical MO theory of extended Huckel type. The off-diagonal elements in Hamiltonian matrix has been modified successfully to obtain one-electron molecular energy. The numerical strength of Mn-O bond order has been calculated to be 0.1820, the electronic charge on the metal and ligand has also been found as 0.4237 and -0.45. The electronic transition for $^1A_1 \rightarrow {}^1T_1$, $^1A_1 \rightarrow {}^1T_2$ and $^1A_1 \rightarrow {}^1T_1$ has also been calculated. The electronic structure of metal ion and ligand is found as $d^{5.9811}$, $S^{0.2322}$, $P^{0.3680}$ and $S^{1.89}$, $P^{4.56}$. Thus without using the hybridization of ligand for orbital wave function the results calculated by us are in good agreement with the results obtained by others using different method considering hybrid ligand orbitals.

परिगणन की विधि

हमने अपने परिगणनों में समस्त अतिव्यापनों S_{ij} को स्लेटर प्रकार के कक्षकों के लिये मान ज्ञात किये हैं। हमने कहीं भी कक्षकीय तरंग फलनों के लिये लिगैंड संकरीकरण की मात्रा के विषय

में कोई संकल्पना नहीं की । इससे इसकी पुष्टि होती है कि विसरण सिद्धान्त $\delta E/dc_1=0$ MO गुणक है और E MO आइगेन मान है । ये प्रतिबन्ध तथा LCAO कल्पनाएँ[2] अर्थात् $\psi=\sum_i C_1 j\phi_i$ जहाँ ψj Jवाँ MO है, ϕ_i नवीं परमाणु कक्षक का LCAO है जो दीर्घकालिक सारणिक का परिचित प्रतिबन्ध है, अर्थात्

$$\det |H_{ij}-ES_{ij}|=0 \tag{1}$$

जहाँ H_{ij} पूर्ववत् हैमिल्टोनियन मैट्रिक्स तल है जो ϕ_iवें तथा ϕ_jवें परमाणु कक्षकों के मध्य में अवस्थित है और S_{ij} इन परमाणुक कक्षकों के मध्य अतिव्यापन समाकल है

बन्ध दूरिया[3,4]

Mn--0=1.59 A^0, 0--0=2.596 A^0 (चतुष्फलकीय ज्यामिति)

आणविक कक्षकों को निर्मित करने के लिये 25 कक्षकों के समुच्चय को आधार बनाया गया जिसमें Mn, 4S, 4p तथा 3d और 0, 2s तथा 2p परमाणुक कक्षकों को व्यवहृत किया गया ।

परमाणु कक्षकों को नोडविहीन स्लेटर प्रकार के कक्षकों के रूप में (STO) व्यक्त किया गया जिनका स्वरूप इस प्रकार था

$$\psi(n, l, m)=Nr^{n-1} \exp(-\alpha_{ir})\, Yl^m(\theta, 0) \tag{2}$$

जहाँ N सामान्यीकरण गुणक है, α_i परिरक्षण प्राचल है तथा $Yl^m(\theta,\psi)$ पूर्ववत् गोलीय हार्मोनिक है।

विकर्ण मैट्रिक्स अवयवों H_{ii} का मूल्यांकन

H_{ii} किसी इलेक्ट्रान की iवें परमाणु कक्षक की ऊर्जा है जो अणु के नाभिकों एवं अन्य इलेक्ट्रानों के क्षेत्र में परिभ्रमण करता है । हैमिल्टोनियन आपरेटर तथा लाम्बिक तरंग फलनों X_1 के पदों में इन मैट्रिक्स अवयवों को डिरैक-संकेत रूप में निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$H_{ii}=\langle X_i|-1/2\nabla_i^2|X_i\rangle-\langle X_i|Z_\alpha|\gamma_\alpha|X_i\rangle+\langle X_i|\sum_{i>i} X_jX_j|\gamma_{ij}|X_i\rangle$$
$$-\langle X_i|\sum_{\beta\neq\alpha} Z_\beta|\gamma_\beta|X_i\rangle+\langle X_i|\sum_{\substack{k>i\\k\neq j}} X_kX_k|\gamma_{ik}|X_i\rangle \tag{3}$$

जहाँ $1/2\nabla i^2$ गतिक ऊर्जा आपरेटर है, Z_α/r_α αवें नाभिक पर कार्यशील नाभिकीय आकर्षण है जिस पर iवाँ परमाणु-कक्षक केन्द्रित है तथा $\Sigma X_jX_j/r_{ij}$ इलेक्ट्रान विकर्षण आपरेटर है जिसमें Jवाँ परमाणु-कक्षक α नाभिक में तथा k परमाणु कक्षकों का द्योतक है जो β नाभिक पर केन्द्रित है ।

यदि हम समीकरण 3 के प्रथम तीन पदों (H_{ii} के प्रति मुक्त आयन के योगदान) की परिभाषा A_{ii} के रूप में करें तथा अन्य पदों की M_{ii} के रूप में करें जो अणु में अन्य परमाणुओं से H_{ii} के प्रति योगदान है तो हम H_{ii} को पुनः निम्नप्रकार व्यक्त कर सकते हैं

$$H_{ii}=A_{ii}+M_{ii} \tag{4}$$

विशिष्ट मुक्त आयन इलेक्ट्रान संरचना के लिये A_{ii} का प्रत्यक्ष मान ज्ञात किया जा सकता है किन्तु इनका परिमापन परम्परागत विधि से संयोजकता अवस्था आयनीकरण विभवों ($VSIP_{ii}$) के द्वारा किया गया है।

प्रक्रम $O^0 \rightarrow O^+ + e^-$ के लिये A_{ii} के मान VSIP के रूप में ज्ञात किये गये जो हिंजे तथा जाफे[5] द्वारा क्रमशः $sp^2\,p^2\,p$ और $s^2\,p^2\,pp$ संरचनाओं में 2s तथा 2p कक्षकों के लिये दिये गये हैं।

प्रक्रम $Mn^0 \rightarrow Mn^+ + e^-$ के लिये A_{ii} के मान स्पेक्ट्रमी अवस्थाओं तथा बालहाउसेन एवं ग्रे[6] द्वारा सारणी 1 में दी गई बहुकताओं के औसत मानों से ज्ञात किये गये। चूंकि Mn^{+2} की स्पेक्ट्रमी अवस्थाएँ अंकित नहीं की गई हैं अतएव हमने निम्नलिखित बातों का ध्यान रखते हुये प्रक्रम $Mn^+ \rightarrow Mn^{+2} + e^-$ के लिये A_{ii} के मान ज्ञात किये हैं।

सारणी 1

$Mn^0 \rightarrow Mn^+ + e^-$ के लिये A_{ii} प्राप्त करने के लिये Mn अवस्थाएँ तथा प्रक्रम, औसत रूप में

	प्रारम्भिक अवस्था		अन्तिम अवस्था	+	कक्षक	Mn' $\langle A_{ii} \rangle$, ev
	$3d^6\,4s$	→	$3d^6$	+	4s	
4s	$3d^5\,4s^2$	→	$3d^5\,4s$	+	4s	−8.24
	$3d^5\,4s\,4p$	→	$3d^5\,4p$	+	4s	
	$3d^5\,4s\,4p$	→	$3d^5\,4s$	+	4p	
4p	$3d^6\,4p$	→	$3d^6$	+	4p	−4.43
	$3d^5\,4p^2$	→	$3d^5\,4p$	+	4p	
	$3d^7$	→	$3d^6$	+	3d	
3d	$3d^6\,4s$	→	$3d^5\,4s$	+	3d	−7.31
	$3d^6\,4p$	→	$3d^5\,4s$	+	3d	

सारी अवस्थाओं की बहुकताओं के लिये औसत निकाला गया और ये मान निर्देश 6 से प्राप्त किये गये।

जर्नर तथा गाउटरमैन[7] ने प्रथम पंक्ति की अनेक धातुओं, M, के लिये VSIP मान प्राप्त किये हैं। उन्होंने देखा कि M^+ के VSIP मान 3s तथा 3d में M की अपेक्षा 10ev अधिक थे जबकि 3p इलेक्ट्रानों के लिये 7ev के लगभग उच्च थे।

सिद्धान्त M_{ii} के बहु-केन्द्रक समाकल को परिगणित किया जा सकता है लेकिन इसमें संगणन समय अधिक लगेगा। किन्तु इन्हें बिन्दु आवेश सन्निकटन द्वारा[8] अंशतः ज्ञात किया जा सकता है

$$M_{ii} \approx \sum_{\beta \neq \alpha} Z_{eff}/r_{\beta} \tag{5}$$

जहाँ Zeff β नाभिक का प्रभावशाली बिन्दु आवेश है। यह योग समस्त नाभिकों का है लेकिन इसमें वह नाभिक नहीं है जिस पर iवाँ परमाणु कक्षक केन्द्रीय है। बोर त्रिज्याओं में α तथा β नाभिकों के बीच की अन्तरानाभिक दूरी r_β है।

यह ध्यान रखा जाता है कि O परमाणु के चारों ओर विभव क्षेत्र O नाभिक तक किसी बिन्दु के पहुँचने पर ऋणात्मक से धनात्मक में बदल जाता है।

दूरस्थ विकर्ण मैट्रिक्स अवयवों H_{ij} का मूल्यांकन

H_{ij} का मान ज्ञात करने के लिये हमने निम्नलिखित सम्बन्ध का उपयोग किया है

$$H_{ij} = -KS_{ij}\ (H_{ii}H_{jj})^{1/k} \tag{6}$$

जहाँ K=2.1

दूरस्थ विकर्ण मैट्रिक्स अवयवों के मूल्यांकन के लिये पहले के कार्यकर्ताओं ने[9-12] अन्य अनेक आनुभविक सम्बन्धों का उपयोग किया है।

संगणन विधि

तरंग फलनों तथा H_{ii} मानों का उपयोग करते हुये कक्षकों के समुच्चय के लिये दीर्घकालिक सारणिक (समीकरण 1.1) हल किया गया। आइगेन मान तथा आइगेन वेक्टर प्राप्त किये गये तथा आइगेन वेक्टरों के मुलिकन जनसंख्या विश्लेषण[14] से आवेश वितरण प्राप्त हुये। परिगणनाओं की n बार पुनरावृत्ति की गई जिससे Mn आवेश में जो अन्तर था वह (n−1)वीं तथा nवीं बार 0.01 आवेश इकाई से कम था। सारी परिगणनाएँ DEC 1099 कम्प्यूटर प्रणाली में जैकोबी रूटीन का प्रयोग करते हुये इंडियन इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी कानपुर में सम्पन्न की गई।

एक इलेक्ट्रान MO आइगेन मानों के लिये प्राप्त मानों के आधार पर इलेक्ट्रानी संक्रमणों की गणना की गई है और उनकी तुलना प्रयोगात्मक मानों तथा बालहाउसेन तथा ग्रे द्वारा संगणित अवशोषण उच्चिष्ठों के लिये प्राप्त मानों से की गई है[6]। इन परिणामों को सारणी 3 में दिया जा रहा है।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 में उपर्युक्त विधि से परिगणित एक इलेक्ट्रान MO आइगेन मान प्रदर्शित किये गये हैं।

सारणी 2

MnO^{-}_{4} एक-इलेक्ट्रान MO आइगेन मान

MO	ऊर्जा eV	स्थिति	MO	ऊर्जा eV	स्थिति
1	33.18	0	14	—17.15	2
2	33.18	0	15	—17.18	2
3	32.98	0	16	—17.86	2
4	— 5.25	0	17	—17.86	2
5	— 5.39	0	18	—17.86	2
6	— 6.55	0	19	—18.55	2
7	— 6.85	0	20	—18.73	2
8	— 7.79	0	21	—33.85	2
9	—10.78	0	22	—38.57	2
10	—13.38	2	23	—39.25	2
11	—14.75	2	24	—52.25	2
12	—14.85	2	25	—63.80	2
13	—16.25	2			

योगफल = —824.72 ev

सारणी 3

MnO_4^{-2} के इलेक्ट्रानिक स्पेक्ट्रा में परिगणित तथा प्रेक्षित क्रान्तिक ऊर्जाएँ तथा दोलक शक्तियाँ

पट्ट उच्चिष्ठ	f	एसाइनमेंट	परिगणित एक-इलेक्ट्रान संक्रमण ऊर्जाएँ	परिगणित एक-इलेक्ट्रान संकमक ऊर्जाएँ
Cm⁻¹			Cm⁻¹	Cm⁻¹
(14,500)	क्षीण	$^1A_1 \rightarrow {}^1T_1$	20,969	22,600
18,300	0.032	$^1A_1 \rightarrow {}^1T_2$	20,969	22,600
(28,000)[b]	b	$^1A_1 \rightarrow {}^1T_2$	32,018	33,200
32,200	0.070	$^1A_1 \rightarrow {}^1T_2$	32,018	33,200
(44,000)[c]	c	$^1A_1 \rightarrow {}^1T_2$	45,083	48,100

a देखें निर्देश 15, b क्षीण शोल्डर, c शोल्डर जिसका पट्ट $\epsilon \sim 1500$ वाला है।

केन्द्रीय धातु आयन की इलेक्ट्रान की संरचना $d^{5.9811}$, $s^{0.2322}$, $p^{0.3630}$ पाई गई तथा इस आयन पर +0.4237 आवेश पाया गया। आक्सीजन परमाणु की इलेक्ट्रानी संरचना $s^{1.89}$, $p^{4.56}$ संगणित की गई और आक्सीजन परमाणु का आवेश —0.45 पाया गया।

हमने मुलिकन के सूत्र[14] के आधार पर Mn—O बन्ध क्रम की प्रकृति की परिगणना की और यह 0.1820 प्राप्त हुई जिसमें Mn–O बन्ध की सह संयोजकता प्रकट होती है। इस प्रकार हम यह देखते हैं कि दूरस्थ विकर्ण तत्वों के अर्धआनुभविक परिगणनों पर आधारित आणविक कक्षक परिगणनाएँ अन्य लोगों के द्वारा प्राप्त परिणामों के संगत हैं[9,10,15,16]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (आर० के० सिंह) को सी० एस० आई० आर० नई दिल्ली से आर्थिक सहायता प्राप्त हुई जिसके लिये आभार व्यक्त करते हैं।

निर्देश

1. स्लेटर, जे० सी०, Phys., Rev., 1930, 36, 57.
2. वान ब्लेक, जे० एच०, J. Chem. Phys. 1934, **2**, 22.
3. Tables of Interatomic distances and configuration in molecules and ions. Special publication No. 11, केमिकल सोसाइटी लन्दन 1958, पृष्ठ M89.
4. मूनी, आर० सी० एल०, Phys. Rev. 1931, **87**, 1306.
5. हिञ्जे, जे० तथा जाफे, एच० एच०, J. Chem. Soc., 1962, **84**, 540.
6. बालहाउसेन, सी० जे० तथा ग्रे, एच० बी०, Molecular Orbital Theory. न्यूयार्क, बेंजमिन बुक्स 1965 पृष्ठ 120.
7. जर्नर, एम० तथा गाउटरमैन, एम०, Theort. Chem. Acta. 1966, **4**, 44.
8. पापल, जे० ए०, Trans. Faraday Soc., 1953, **49**, 1375.
9. वोल्टसबर्ग, एस० तथा हेल्महोल्ट्ज, एल०, J. Chem. Phys., 1952, **20**, 837.
10. बालहाउसेन, सी० जे० तथा ग्रे, एच० बी०, Inorg. Chem., 1962, **1**, 111.
11. कुशैक्स, एल० सी०, J. Chem. Phys., 1965, **43**, 1575.
12. येरानोस, डब्लू० ए०, J. Chem. Phys., 1966, **44**, 2207.
13. केटल, एस० एफ० ए०, J. Chem. Soc. Sect. A. 1966, 420.
14. मुलिकन, आर० एस०, J. Chem. Phys., 1955, 23, 1833.
15. त्रिस्टे, ए० तथा ग्रे०, एच० बी०, Inorg. Chem., 1964, 3, 1113.
16. कोनोर, जे० ए०, हिलर, जे० एच०, सान्डर्स, बी० आर०, वुड, एम० एच० तथा बार्बर एम०, Mol. Phys., 1972, 24 (3), 497.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 28, No. 1, 1985

नार्लुण्ड माध्यों के द्वारा सन्निकटन कोटि-I

आर० बी० सक्सेना

एम-113 न्यू सुभाष नगर, भोपाल

[प्राप्त—नवम्बर 26, 1981]

सारांश

लेखक ने फ्लेट के एक प्रमेय को नार्लुण्ड माध्य तक बढ़ाया है और इसके संयुग्मी समरूपों को सिद्ध किया है।

Abstract

Degree of approximation by Norlund means-I. *By* R. B. Saxena. M-113 New Subhas Nagar, Bhopal.

Two theorems of Flett (1956) on the degree of approximation to a function by the Cesaro means of its Fourier Series have been extended to Norlund means and their conjugate analogues proved by the author (Saxena, 1981). Continuing the work further, the author extends another theorem of Flett to Norlund means and proves its conjugate analogue as well.

1. माना कि $f(x)$ लेबेक्ग संकलनीय है और आवर्त 2π के साथ आवर्ती है तथा माना कि

$$f(x) \sim 1/2a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x) \tag{1.1}$$

इसकी फूरियर श्रेणी है।

(1.1) की संयुग्मी फूरियर श्रेणी है।

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k.\cos kx - a_k.\sin kx) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(x). \tag{1.2}$$

एक अनन्त श्रेणी $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ के नार्लुण्ड माध्यों की परिभाषा आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ के अनुक्रम सहित रूपान्तर द्वारा परिभाषित की जाती है[4,7]।

$$t_n = 1/p_n \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} S_k = 1/p_n \sum_{k=0}^{n} p_k S_{n-k} \tag{1.3}$$

जहाँ $\{p_n\}$ अनृण अत्यन्त एकदिष्ट ह्रासमान अचरों का अनुक्रम है तथा

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k \neq 0, \ p_{-1} = p_{-1} = 0.$$

हम निम्नलिखित संकेतों का उपयोग करेंगे

$$\phi_x(t) = \phi(t) = \{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\},$$

$$\psi_x(t) = \psi(t) = \{f(x+t) - f(x-t)\},$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2\pi P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cdot \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2},$$

$$\text{N}_n(t) = \frac{1}{2\pi P_n} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k} \cdot \frac{\cos(k+1/2)t}{\sin t/2},$$

$$\text{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t).\cot t/2 \, dt,$$

$[x]$ सबसे बड़े समाकल $\leqslant x$ को बताता है।

2. बर्नस्टाइन (देखें जिगमुंड[8]) का चिरसम्मत फल है कि यदि $f(x)$ श्रेणी Lip α, $0<k<1$ का हो तथा σ_n श्रेणी (1.1) का nवाँ फेजर माध्य हो तो

$$\alpha_n(x) - f(x) = 0(n^{-\alpha}), \ x \text{ में एकसमान} \tag{1.2}$$

यह फल किसी धन k के लिये (C,k) माध्यों के लिये सत्य रहता है।

फ्लेट[1] ने एक फलन के सन्निकटन की कोटि के लिये निम्नलिखित प्रमेय उसकी फूरियर श्रेणी के चेजारो माध्यों के फलन के रूप में सिद्ध की है।

प्रमेय A : माना कि $0<\alpha<1$, $0<\delta\leqslant\pi$. यदि x बिन्दु है कि

$$\int_0^t |d\phi_x(u) \leqslant At^\alpha$$

जब $0\leqslant t\leqslant\delta$, तो

$$\overset{\alpha}{\sigma_n}(x)-f(x)=0(n^{-\alpha}).$$

इस प्रमेय के सार्वीकरण से सिद्दीकी ने[6] निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय B : माना कि $0<k<1$ तथा $0<\delta\leqslant\pi$. यदि x ऐसा बिन्दु हो कि

$$\int_0^t |d\phi(u)|\leqslant A\psi(t), \text{ जब } 0\leqslant t\leqslant\delta$$

तो $$\overset{k}{\sigma_n}(x)-f(x)=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)+0(n^{-k})$$

जहाँ $\psi(t)$ एक धनात्मक वर्द्धमान फलन है जिससे कि

$$\int_{1/n}^{\delta} \frac{\psi(n)}{t^2}\,dt=0\left(n\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ n\to\infty.$$

खान[2] ने प्रमेय B को और भी सार्वीकृत किया है और निम्नलिखित परिणाम सिद्ध किया है।

प्रमेय C : यदि

$$\int_0^t |d\phi(u)| \leqslant A\psi(t) \text{ जहाँ } 0\leqslant t\leqslant\delta$$

तो $$\sigma_n(\mathrm{x})-f(x)=0\left(\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

जहाँ $\psi(t)$ एक ऐसा धनात्मक वर्धमान फलन है कि

$$\int_{1/n}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t^2}\,dt=0\left(n\psi\left(\frac{1}{n}\right)\right),\ n\to\infty,$$

$\sigma_n(x)$ श्रेणी (1.1) का त्रिकोणात्मक मैट्रिक्स माध्य है।

किन्तु यहाँ बता दिया जाय कि यदि हम $\psi(t)$ के स्थान पर t^α रख दें तो खान द्वारा प्राप्त सन्निकट कोटि उतनी स्पष्ट नहीं होती जितनी हमारी होती है।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम नार्लुण्ड माध्य के लिये एक प्रमेय A का सार्वीकरण करेंगे और इसके संयुग्मी समरूप को सिद्ध करेंगे। संक्षेप में हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय : यदि

$$\int_0^t |d\psi(u)| \leqslant At^{\alpha}, \tag{2.2}$$

क्योंकि $0 \leqslant t \leqslant \delta$, जहाँ $0 < \alpha < 1$ तथा $0 < \delta \leqslant \pi$, तो

$$t_n(x) - f(x) = 0\left\{\frac{P[P_n/p_n]}{p_n}\left(\frac{p_n}{p_n}\right)^{\alpha}\right\} \cong 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\},$$

जहाँ t_n श्रेणी (1.1) का नार्लुण्ड माध्य (1·3) है जो अनृण एकदिष्ट ह्रासमान अचरों के अनुक्रम $\{p_n\}$ द्वारा उत्पन्न है।

प्रमेय : यदि

$$\int_0^t |d\psi(u)| \leqslant At^{\alpha},$$

क्योंकि $0 \leqslant t \leqslant \delta$ जहाँ $0 < \alpha < 1$ तथा $0 < \delta \leqslant \pi$, तो

$$\mathbf{t}_n(x) - \mathbf{f}(x) = 0\left\{\frac{P[P_n/p_n]}{P_n}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} \cong 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\},$$

बशर्ते कि संयुग्मी फलन $\mathbf{f}(x)$ का अस्तित्व हो, जहाँ $\mathbf{t}_n$ श्रेणी (1.2) का नार्लुण्ड माध्य (1·3) है तथा $\{p_n\}$ एक अनुक्रम है जो प्रमेय 1 में परिभाषित हुआ है।

3. हमें अपने प्रमेयों की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1. सक्सेना[5] : चूंकि $0 \leqslant t \leqslant p_n/P_n$,

$$N_n(t) = 0(n)$$

प्रमेयिका 2. मकफैडेन[3] : यदि अनुक्रम $\{p_n\}$ अनृण तथा अवर्धमान हो तो

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

तथा किसी n के लिये हमें

$$\left|\sum_{k=a}^{b} p_k\, e^{i(n-k)t}\right| \leqslant p_\tau$$

किसी a लिये प्राप्त होगा जहाँ $\tau = [t^{-1}]$.

प्रमेयिका 3. सक्सेना[5] : चूंकि

$$0 < \frac{p_n}{P_n} \leqslant t \leqslant \delta \leqslant \pi,$$

(i) $$|N_n(t)|=0\left(\frac{p_\tau}{tP_n}\right),$$

(ii) $$|\mathrm{N}_n(t)|=0\left(\frac{p_\tau}{nP_n}\right)$$

जहाँ $\tau=[1/t]$.

प्रमेय 1 की उपपत्ति : यदि हम लिखें (जिगमुण्ड[8])

$$S_n(x)=1/2a_0+\sum_{k=1}^{n}A_k(x)$$

तो हमें

$$(S_n)x-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \phi(t)\,\frac{\sin(n+1/2)\,t}{\sin t/2}\,dt.$$

प्राप्त होगा। अब $\Sigma A_k(x)$ के लिये (1·3) का प्रयोग करने पर

$$t_n(x)-f(x)=\frac{1}{P_n}\left\{\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}\,S_k(x)\right\}-f(x)$$

$$=\int_0^\pi \phi(t)\,\frac{1}{2\pi P_n}\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}\,\frac{\sin(k+1/2)t}{\sin t/2}\,dt$$

$$=\int_0^\pi \phi(t)\,N_n(t)\,dt$$

$$=\left\{\int_0^{p_n/P_n}+\int_{p_n/P_n}^{\delta}+\int_\delta^\pi\right\}\phi(t)\,N_n(t)\,dt,$$ जहाँ

$0<p_n/P_n\leqslant\delta\leqslant\pi$,

$=I_1+I_2+I_3$,, माना (4.1)

अब प्रमेयिका 1 का प्रयोग करने पर

$$|I_1|\leqslant\int_0^{p_n/P_n}|\phi(t)|\,.\,|N_n(t)|\,dt$$

$$=0(n)\int_0^{p_n/P_n}|\phi(t)|\,dt.$$

चूँकि $\phi(0)=0$, अतएव हम लिख सकते हैं कि

$$|\phi(t)|=|\phi(t)-\phi(0)|$$

$$=\left|\int_0^t d\,\phi(u)\right|$$

$$\leqslant\int_0^t |d\,\phi(u)|$$

$$\leqslant At^{\alpha},$$ (2.1) के प्रयोग से

जिससे $|I_1|=0\{n(p_n/P_n)^{\alpha+1}\}$

$=0(p_n/P_n)^{\alpha}$ चूंकि $np_n\leqslant P_n$. (4.2)

आगे भी, $$|I_2|\leqslant\int_{p_n/P_n}^{\delta}|\phi(t)|\,.\,|N_n(t)|\,dt$$

$$=\int_{p_n/p_n}^{\delta}0\,(t^{\alpha})\,0\left(\frac{p_\tau}{tp_n}\right)dt$$ (प्रमेयिका 3(i) तथा के (2.1) प्रयोग से)

$$=\frac{1}{P_n}\int_{p_n/P_n}^{\delta}0\,(t^{\alpha-1}\,p_\tau)\,dt$$

$$=0\left\{\frac{P[p_n/P_n]}{p_n}\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\}$$

$$\cong 0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\} \quad (4.3)$$

अन्त में $I_3=0(1)$ रीमान-लेबेस्ग प्रमेय से (4.4)

अब (4.1), (4.2) (4.3) तथा (4 4) को संयुक्त करने पर प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

5. प्रमेय 2 की उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि

$$S_n(x)=1/2\pi\int_0^{\pi}\psi(t)\,\frac{\cos(t/2)-\cos(n+1/2)t}{\sin t/2}\,dt$$

$\Sigma B_k(x)$ के लिये (1.3) क प्रयोग करने पर

$$\mathbf{t}_n(x)-\mathbf{f}(\mathbf{x})=1/P_n\sum_{k=0}^{n}p_k\,\mathbf{S}_{n-k}(x)-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\psi(t)\cot t/2\,dt$$

$$=1/P_n \sum_{k=0}^{n} p_k \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(t) \frac{\cos t/2-\cos (n-k+1/2)\ t}{\sin t/2}\, dt$$

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(t) \cot t/2\, dt$$

$$=-\int_0^\pi \frac{1}{2\pi P_n} \psi(t) \cdot \sum_{k=0}^{n} p_k \cdot \frac{\cos (n-k+1/2)t}{\sin t/2}\, dt$$

$$=-\int_0^\pi \psi(t) \cdot \mathbf{N}_n(t)\, dt, \tag{5.1}$$

प्रमेय को सिद्ध करने के लिये यह दिखाना पर्याप्त होगा कि हमारी कल्पनाओं के अन्तर्गत

$$\int_0^\pi \psi(t)\, \mathbf{N}_n(t)\, dt = 0 \left\{ \frac{P[p_n/p_n]}{p_n} (p_n/P_n)^\alpha \right\}.$$

क्योंकि $0 < p_n/x_n \leqslant \delta \leqslant \pi$, हमें निम्नलिखित प्राप्त होगा

$$\int_0^\pi \psi(t)\, \mathbf{N}_n(t)\, dt = \left\{ \int_0^{p_n/P_n} + \int_{p_n/P_n}^{\delta} + \int_\delta^\pi \right\} \psi(t)\, \mathbf{N}_n(t)\, dt$$

$$=\mathbf{I}_1+\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3, \text{ माना} \tag{5.2}$$

चूंकि संयुग्मी फलन विद्यमान है

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{p_n/P_n} \psi(t) \cdot \cot t/2 = 0(1).$$

अतः

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{p_n/P_n} \psi(t) \cdot \cot t/2\, dt - \mathbf{I}_1$$

$$=\frac{1}{2\pi} \int_0^{p_n/P_n} \psi(t) \left\{ \cot t/2 - 1/P_n \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k \cos (n-k+1/2)}{\sin t/2} \right\} dt$$

$$=\frac{1}{2\pi\, p_n} \int_0^{p_n/P_n} \psi(t) \sum_{k=0}^{n} p_k \left\{ \sum_{v=0}^{n-k} 2 \sin v t \right\} dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\, p_n} \int_0^{p_n/P_n} |\psi(t)| \sum_{k=0}^{n} n p_k\, dt$$

$$=0(n)\int_0^{p_n/P_n} 0(t^{\alpha})\,dt,$$ (2.3) के प्रयोग से

$$=0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)\right\}^{\alpha}. \qquad (5.3)$$

आगे भी,

$$|\mathrm{I}_2| \leqslant \int_{p_n/p_n}^{\delta} |\psi(t)|\,.\,|\mathrm{N}_n(t)|\,dt$$

$$=\int_{p_n/P_n}^{\delta} |\psi(t)|\,.\,0\left(\frac{p_\tau}{tp_n}\right)dt,$$ (प्रमेयिका 4.1 के प्रयोग से)

$$=0\left(\frac{1}{p_n}\right)\int_{p_n/P_n}^{\delta} 0\,(t)^{\alpha-1}\,.\,0\,(p_\tau)\,dt,$$ (2.2 के प्रयोग से)

$$\leqslant 0\left\{\frac{P[p_n/p_n]}{P_n}\right\}.\,0\left\{\left(\frac{p_n}{p_n}\right)^{\alpha}\right\}$$

$$=0\left\{\frac{P[p_n/P_n]}{P_n}\,.\,\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\}$$

$$=0\left\{\left(\frac{p_n}{P_n}\right)^{\alpha}\right\}. \qquad (5.4)$$

अन्त में $\mathrm{I}_3 = 0\,(1)$, रीमान-लेबेस्ग प्रमेय के प्रयोग से, (.55)

(5.2), (5.3), (5.4) अथा (5.5) के परिप्रेक्ष्य में प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा॰ के॰ सी॰ श्रीवास्तव का आभारी है जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. फ्लेट, टी॰ एम॰, Quart. J. of Math. (Oxford) 1956, 7, 81-95.
2. खान, एच॰ एच॰, Indian J. Pure Appl. Math. 1975, **8**, 849-855.
3. मकफाडेन, एल॰, Duke Math. J., 1942, **9**, 168-207.
4. नार्लुण्ड, एन॰ ई॰, Acta Univ. Lund., 1979, **16**, 0-3.
5. सक्सेना, आर॰ बी॰, Bull. Austral. Math. Soc. 1989, **23**, 395-412.
6. सिद्दीकी, ए॰ एच॰, Indian J. Pure Appl. Math. 1971, **3**, 367-373.
7. वोरोनॉय, जी॰ एफ॰, Annals of Math., 1932, **33**, 422-428.
8. जिगमुण्ड, ए॰, Trigonometrical Series, वार्सा, 1935.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

परम्परागत तथा परिवर्द्धित बहुचर H फलनों के गुणनफल को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाला व्यापकीकृत समाकल रूपान्तर

वाई० एन० प्रसाद तथा एम० भार्गव

अप्लायड मैथमेटिक्स सेक्सन, इंस्टिट्यूट आव टेक्नोलाजी,
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जून 18, 1984]

सारांश

इस शोध पत्र में हमने एक नया समाकल रूपान्तर प्रस्तुत किया है जिसके रूपान्तर अष्टि के रूप में परम्परागत तथा एक परिवर्द्धित बहुचर H-फलनों का गुणनफल लिया गया है। इस रूपान्तर से लाप्लास तथा हैंकल के रूपान्तरों के करीब-करीब सारे ज्ञात व्यापकीकरण और भी व्यापक हो जाते हैं। प्रसाद, यादव, सिंह इत्यादि द्वारा अधीत रूपान्तर हमारे रूपान्तर से विशिष्ट दशाओं में प्राप्त हो जाते हैं।

Abstract

On a generalized integral transform involving product of a classical and a modified multivariable $\bar{H}$-functions as kernel. *By* Y. N. Prasad and M. Bhargava, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper we have introduced a new integral transform where we have taken a product of a classical and a modified multivariable H-functions as kernel of the transform. This transform generalizes almost all the generalizations of Laplace and Hankel transforms studied so far. The transform studied by Prasad [16, 74]. Yadav [14, p. 58], Singh [9, p. 71] etc. are shown to be particular cases of our transform.

1. विषय प्रवेश

हम श्रीवास्तव तथा अन्य[1] का अनुगमन करते हुये परम्परागत बहुचर H-फलन को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित तथा सांकेतिक रूप से प्रकट करते हैं

$$H^{0, N : (M', N'); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \left[\begin{array}{c|l} x_1 & \{(a_P ; (\alpha_P^{(i)})_{i=1, \ldots, r})\} : \\ \vdots & \\ x_r & \{(b_Q ; (\beta_Q^{(i)})_{i=1, \ldots, r})\} : \end{array} \begin{array}{l} \{(c'_{P'}, \gamma'_{P'})\}; \ldots; \{(c^{(r)}_{P^{(r)}}, \gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\} \\ \\ \{(d'_{Q'}, \delta_{Q'}); \ldots; (d^{(r)}_{Q^{(r)}}, \delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi w)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r)\, \psi(s_1, \ldots, s_r)\, x_1^{s_1}, \ldots, x_r^{s_r}\, ds_1, ds_r, \tag{1.1}$$

जब कि

$$\phi_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{M^{(i)}} \Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{N^{(i)}} \Gamma(1 - c_j^{(i)} + \gamma_j^{(i)} s_i)}{\prod_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \Gamma(1 - d_j^{(i)} + \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \Gamma(c_j^{(i)} - \gamma_j^{(i)} s_i)} \quad i = 1, \ldots, r \tag{1.2}$$

तथा

$$\psi(s_i, \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{N} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)}{\left[\prod_{j=N+1}^{P} \Gamma(a_j - \sum_{j=1}^{r} (\alpha_j^{(i)} s_i)) \right] \times \left[\prod_{j=1}^{Q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^{r} (\beta_j^{(i)} s_i)) \right]} \tag{1.3}$$

यहाँ तथा आगे भी, मूर्धांक (i) डैशों की संख्या के लिये है उदाहरणार्थ $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P''$ आदि $\omega = \sqrt{-1}$; $\{(a_p; (\alpha_p^{(i)})_{i=1, \ldots, r})\}$, जो इस प्रकार भी प्रदर्शित किया जायेगा $\{(a_p; \alpha_p^{(1)}, \ldots, \alpha_p^{(r)})\}$, p-प्राचलों के अनुक्रम $(a_1; (\alpha_1^{(i)})_{i=1, \ldots, r}); \ldots (a_p, (\alpha_p^{(i)})_{i=1, \ldots, r})$ को प्रदर्शित करता है जबकि $\{(c_{N'}, \gamma_{N'})\}$ प्राचल $(c_1, \gamma_1), \ldots, (c_{N'}, \gamma_{N'})$ का संक्षिप्त रूप है; रिक्त गुणनफल को इकाई माना

जाता है; ऊपर आये हुये गुणांक $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं जबकि उनमें आये हुये a_j, b_j, c_j, d_j सम्मिश्र संख्यायें हैं। यहाँ $N, P, Q, M^{(i)}, N^{(i)}, P^{(i)}, Q^{(i)}$ ऐसे पूर्णांक हैं कि $0 \leqslant N \leqslant P, P \geqslant 0, Q \geqslant 0, 0 \leqslant M^{(i)} \leqslant Q^{(i)}, 0 \leqslant N^{(i)} \leqslant P^{(i)}, i=1, \ldots, r$. सम्मिश्र s_i—तल में कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार है जो $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक आवश्यकतानुसार इस प्रकार विस्तीर्ण है कि इससे न केवल यह सुनिश्चित होता है कि कंटूर L_i (s_i-तल में) समाकल्य की किसी विचित्रता को प्रतिच्छेद नहीं करता है किन्तु दो प्रकार के Γ-फलनों की निवार्य विचित्रताओं के समुच्चयों को भी अलग करता है। अधिक स्पष्टता के लिये L_i इस प्रकार का है कि $\Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i)(j=1, \ldots, M^{(i)})$ के सारे ध्रुव इसके दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-c_j^{(i)} + \gamma_j^{(i)})(j=1, \ldots, N^{(i)}$ एवं

$$(1-a_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)$$

के सारे ध्रुव इसके बायीं ओर हैं। कंटूर समाकल (1.1) अभिसारी है यदि

$$|\arg x_i| < \frac{1}{2} \pi U_i, \; U_i > 0, \;\; i=1, \; \ldots, r \text{ जब कि}$$

$$U_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{P} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{Q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)}$$

$$- \sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{i} + \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \gamma_j^{(i)} \tag{1.4}$$

बहुचर H-फलन का उपगामी आचरण, ब्राक्समा[2] की भाँति निम्नांकित द्वारा दिया जाता है।

$$H_{P, Q : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]}^{0, N : (M', N'); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0(|x_1|^{\alpha_1}, \ldots, |x_r|^{\alpha_r})$$

$(x_1, \ldots, x_r)$ के छोटे मानों के लिये जब कि

$$\alpha_i = \min Re\left(\frac{d_j^{(i)}}{\delta_j^{(i)}}\right); j=1, \ldots, M^{(i)}, i=1, \ldots, r. \tag{1.5}$$

और भी

$$\mathbf{H}^{0, N : (M', N'); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_r \end{bmatrix} = 0(|x_1|^{\beta_1} \ldots |x_r|^{\beta_r})$$

$(x_1, \ldots, x_r)$ के वृहत मानों के लिये $N=0$, जब कि

$$\beta_i = \max\left\{\frac{(c_j^{(i)} - 1)}{\gamma_j^{(i)}}\right\}; j=1, \ldots, N^{(i)}, i=1, \ldots, r. \tag{1.6}$$

इस शोधपत्र में हमने निम्नलिखित श्रेणी प्रसार के सूत्र का उपयोग किया है जिसे सक्सेना [3, p.225] तथा मुकर्जी एवं प्रसाद[4] की सहायता से स्थापित किया जा सकता है अर्थात्

$$\mathbf{H}^{0, 0 : (1, n'); \ldots; (1, n^{(r)})}_{p, q : [p', q'+1]; \ldots; [p^{(r)}, q^{(r)}+1]} \left[x_1, \ldots, x_r \left| \begin{matrix} \{(e_j ; (E_p^{(i)})_{i=1, \ldots, r}\} : \\ \{(f_j ; (F_q^{(i)})_{i=1, \ldots, r}\} : \end{matrix} \right. \right.$$

$$\left. \begin{matrix} \{(g'_{p'}, G'_{p'})\}; \ldots; \{(g^{(r)}_{p(r)}, G^{(r)}_{p(r)})\} \\ (h'_0, H'_0), \{(h'_q, H'_q)\}; \ldots; (h^{(r)}_0, H^{(r)}_0), \{(h^{(r)}_{qr}, H^{(r)}_{q(r)})\} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{r} H_0^{(i)}} \sum^{\infty} \phi(\rho_{v1}, \ldots, \rho_{vr}) \prod_{i=1}^{r} \{\theta_i (\rho_{vi}) \frac{(-1)^{iv}}{! \, v_i} (x_i)^{\rho_{vi}}\}$$

जब कि

$$\rho_{vi} = \frac{h_0^{(i)} + v_i}{H_0^{(i)}}, \tag{1.7}$$

$$\theta_i (\rho_{vi}) = \frac{\prod_{j=1}^{n^{(i)}} \Gamma (1 - g_j^{(i)} + G_j^{(i)} \rho_{vi})}{\prod_{j=1}^{q^{(i)}} \Gamma (1 - h_j^{(i)} + H_j^{(i)} \rho_{vi}) \prod_{j=n^{(i)}+1}^{p} \Gamma (g_j^{(i)} - G_j^{(i)} \rho_{vi})}$$

$$i = 1, \ldots, r \tag{1.8}$$

$$\phi(\rho_{v1}, \ldots, \rho_{rv}) = \left[\prod_{j=1}^{p} \Gamma (e_j - \sum_{i=1}^{r} E_j^{(i)} \rho_{vi}) \right]^{-1}$$

$$\times \left[\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(1-f_j+\sum_{i=1}^{r} F_j^{(i)} \rho_{vi}\right) \right]^{-1}, \tag{1.9}$$

प्राचलों पर तुल्य प्रतिबन्ध हैं क्योंकि (1.1) में दिये हुये प्रतिबन्ध सन्तुष्ट हो जाते हैं और

$$|\arg x_i| < \frac{1}{2} \pi U_i,\ U_i > 0,\ i=1, \ldots, r,$$

जब कि

$$U_i = -\sum_{j=1}^{p} E_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} F_j^{(i)} + H_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{q^{(i)}} H_j^{(i)}$$

$$+\sum_{j=1}^{n^{(i)}} G_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} G_j^{(i)},\ i=1, \ldots, r, \tag{1.10}$$

संक्षेप के लिये, हम (1.7) के वाम पक्ष को $H^{(i)}[x_1, \ldots, x_r]$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

1978 में बुशमैन ने कई शोधपत्र[5],[6],[7] तथा[8] प्रस्तुत किये और बताया कि (दो चरों वाले H-फलनों के) प्राचलों $\alpha_j, \beta_j, A_j, B_j$ तथा (बहुचर फलनों के) प्राचलों $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}$ धनात्मक होने के प्रतिबन्धों के शिथिल करने पर H-फलनों के और आगे भी विस्तार सम्भव हो सकते हैं। इसी प्रेरणा पर आधारित प्रसाद तथा सिंह[9] ने कई सम्मिश्र चरों वाले परिवर्द्धित फलन की परिभाषा दी है जिसका हमने इस शोधपत्र में उपयोग किया है। इस परिवर्द्धित H-फलन ने पुनः कई विशिष्ट फलनों का व्यापकीकरण किया है, उदाहरणार्थ C-फलन क्रमशः फाक्स[10], मित्तल एवं गुप्ता[11] के H-फलन तथा श्रीवास्तव एवं पंडा[12] के कई सम्मिश्र चरों वाले H-फलन परिवर्द्धित बहुचर H-फलन निम्नलिखित द्वारा परिभाषित तथा प्रदर्शित किया जायेगा

$$\mathsf{H}^{0, N : \mathbf{R} : (M', N'); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : R : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_p; (\alpha_p^{(i)})_{i=1, \ldots, r})\} : \\ \{(b_Q; (\beta_Q^{(i)})_{i=1, \ldots, r})\} : \end{matrix} \right.$$

$$\{(\mathbf{l_R}; (\mathbf{U_R^{(i)}}, \Lambda_{\mathbf{R}}^{(i)})_{i=1, \ldots, r}\}; \{(c'_{P'}, \gamma'_{P'})\}; \ldots;$$

$$\{(l_R; (U_R^{(i)}, \lambda_R^{(i)})_{i=1, \ldots, r}\}; \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \ldots;$$

$$\left. \begin{matrix} \{(c_{P^{(r)}}^{(r)}, \gamma_{P^{(r)}}^{(r)})\} \\ \{(d_{Q^{(r)}}^{(r)}, \delta_{Q^{(r)}}^{(r)})\} \end{matrix} \ x_1, \ldots, x_r \right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_r}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1),\ldots,\phi_r(s_r)\,\psi(s_1,\ldots,s_r)\,x_1^{s_1},\ldots,x_r^{s_r}\;ds_1,\ldots,ds_r \tag{1.11}$$

जब कि

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod_{j=1}^{M^{(i)}}\Gamma(d_j^{(i)}-\delta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{N^{(i)}}\Gamma(1-c_j^{(i)}+\gamma_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=M^{(i)}+1}^{Q}\Gamma(1-d_j^{(i)}+\delta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=N^{(i)}+1}^{P}\Gamma(c_j^{(i)}-\gamma_j^{(i)}s_i)},\quad i=1,\ldots,r \tag{1.12}$$

$$\psi(s_1,\ldots,s_r)=\frac{\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{\mathbf{R}}\Gamma(\mathbf{l}_j+\sum_{i=1}^{r}\mathbf{U}_j^{(i)}\lambda_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=1}^{Q}\Gamma(1-b_j+\sum_{i=1}^{r}\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=N+1}^{P}\Gamma(a_j-\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{R}(l_j+\sum_{i=1}^{r}U_j^{(i)}\lambda_j^{(i)}s_i)} \tag{1.31}$$

मूर्धांक (i) तथा (1.11) में आये हुये प्राचलों के अर्थ (1.1) के समान हैं। गुणांक $\alpha_j^{(i)},\beta_j^{(i)},\gamma_j^{(i)}$, $\delta_j^{(i)},\Lambda_j^{(i)},\lambda_j^{(i)}$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं जबकि a_j, b_j, $c_j^{(i)}$, $d_j^{(i)}$, $\mathbf{l}_j$ तथा l_j संमिश्र संख्यायें हैं; $U_j^{(i)}$ निम्नलिखित द्वारा दिया गया इकाई फलन है।

$$U_j^{(i)}=\begin{cases}+1 \text{ यदि पद } \lambda_j^{(i)}s_1 \text{ का } j\text{वें गुणक में धनात्मक चिन्ह हो}\\ -1 \text{ यदि पद } \lambda_j^{(i)}s_i \text{ का } j\text{वें गुणक में ऋणात्मक चिन्ह हो}\end{cases}$$

$\mathbf{U}_j^{(i)}$ $(i-1,\ldots,r;j=1,\ldots,\mathbf{R})$. का भी इसी प्रकार का अर्थ है। $\mathbf{R}$ तथा R अऋणात्मक पूर्णांक हैं जो $\psi(s_1,\ldots,s_r)$ के अंश तथा हर में आये हुये Γ-फलनों का मिश्रित चिन्ह प्रकट करते हैं। और भी

$$\Gamma(\mathbf{l}_j+\sum_{i=1}^{r}\mathbf{U}_j^{(i)}\lambda_j^{(i)}s_i)\;(j=1,\ldots,\mathbf{R})$$

के ध्रुव L_i के बाँये या दायें हैं जैसा कि $\mathbf{U}_j^{(i)}$ धनात्मक या ऋणात्मक हो। हम निम्नलिखित संक्षिप्त संकेतन का सर्वत्र उपयोग सुविधाजनक पाते हैं

$$H[x_1,\ldots,x_r] \text{ या } \mathbf{H}_{HP.\,Q\,;\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\ldots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}^{0,\,N\,:\,\mathbf{R}\,:\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_r\end{bmatrix}$$

जो (1.11) द्वारा परिभाषित परिवर्द्धित H-फलन के लिये है। हम उपर्युक्त H-फलन को $H^{(2)}[x_1, ... x_r]$ जबकि $N=\mathbf{R}=0$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे अर्थात्

$$H^{(2)}[x_1, ..., x_r] = \mathbf{H}^{0, 0 : 0 : (M', N'); ...; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : R : [P', Q']; ...; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

यह आसानी से देखा जा सकता है कि r चरों वाले परिवर्द्धित H-फलन (1.11) श्रीवस्तव एवं अन्य[1] द्वारा अधीत बहुचर H-फलन में परिणत हो जाता है यदि $\mathbf{R}=R=0$.

2· नया समाकल रूपान्तर

हम निम्नलिखित प्रकार से एक नये समाकल रूपान्तर की परिभाषा दे रहे हैं जिसके रूपान्तर अष्टि में (1.7) द्वारा दिये गये बहुचर H-फलन एवं (1.11) द्वारा दिये गये परिवर्द्धित बहुचर H-फलन का गुणनफल अन्तर्ग्रस्त है

$$\phi\,[f : s] = \int_0^\infty K(s, x) f(x)\, dx = \Omega[f(x)] \tag{2.1}$$

जबकि रूपान्तर अष्टि $K(s, x)$, निम्नलिखित द्वारा दी जाती है

$$K(s, x) = (sx)^{\rho-1} H^{(1)}[\xi (sx)^{\sigma_1}, ..., \xi (sx)^{\sigma_r}]\, H^{(2)}[z_1 (sx)^{\mu_1}, ..., z_r (sx)^{\mu_r}] \tag{2.2}$$

जहाँ कि $H^{(1)}[\xi_1 (sx)^{\sigma_1}, ..., \xi_r (sx)^{\sigma_r}]$ एवं $H^{(2)}[z_1 (sx)^{\mu_1}, ..., z_r (sx)^{\mu_r}]$ क्रमश: (1.7) तथा (1.15) वाले हैं,

$|\arg (\xi_1 s^{\sigma_i})| < 1/2\, \pi U_i,\ U_i > 0 \quad i=1, ..., r,\ \mu_i > 0,\ \sigma_i > 0$ के लिये

$|\arg (z_i s^{\mu_i})| < 1/2 \pi V_i,\ V_i > 0 \quad i=1, ..., r;\ x \neq 0$ के लिये

$$Re\left\{ \rho + \nu + \sum_{i=1}^{r} \left(a_i^* + \sigma_i \frac{h_0^{()}}{H_j^{(i)}} \right) \right\} > 0,$$

$$Re\left\{ \rho + \nu' + \sum_{i=1}^{r} (\mu_i \beta_i^* + \sigma_i \beta_i) \right\} < 0, \tag{2.3}$$

U_i, (1.10) द्वारा दिया जाता है।

$$V_i = -\sum_{j=1}^{P} a_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{Q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \gamma_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{R} \lambda_j^{(i)} \; ; i=1, \ldots, r, \tag{2.4}$$

$$\beta_i = \max Re\left\{\frac{(g_j^{(i)}-1)}{G_j^{(i)}}\right\} ; j=1, \ldots n^{(i)}, i=1, \ldots, r \tag{2.5}$$

$$\alpha_i^* = \min Re\left\{\frac{(d_j^{(i)}-1)}{\delta_j^{(i)}}\right\} ; j=1, \ldots, M^{(i)}, i=1, \ldots, r \tag{2.6}$$

$$\beta_i^* = \max Re\left\{\frac{(c_j^{(i)}-1)}{\gamma_j^{(i)}}\right\} ; j=1, \ldots, N^{(i)}, i=1, \ldots, r \tag{2.7}$$

और

$$f(x)=\begin{cases} 0\,(|x|)^{v} & \text{लघु } x \text{ के लिए} \\ 0\,(|x|^{v'}) & \text{दीर्घ } x \text{ के लिए} \end{cases}$$

हम $\phi[f:s]$ को $\phi(s)$ द्वारा व्यक्त करेंगे जबकि वह भली-भाँति बोधगम्य हो तथा (2.1) द्वारा परिभाषित व्यापकीकृत रूपान्तर को Ω-रूपान्तर नाम देंगे ।

3. रूपान्तर की विशेष दशायें

(2.1) द्वारा परिभाषित Ω-रूपान्तर लाप्लास, हैंकल तथा फूरिये रूपान्तरों के भली-भाँति ज्ञात बहुसंख्य व्यापकीकरणों में परिणत हो जाता है । हम यहाँ Ω-रूपान्तर की कुछ विशेष स्थितियों तथा उपस्थितियों के बारे में चर्चा करेंगे ।

(i) $R=0$ रखने पर समाकल रूपान्तर (2.1) प्रसाद तथा नारायण[13] द्वारा अधीत समाकल रूपान्तर में परिणत हो जाता है ।

(ii) $H^{(1)}$ में, $r=1=\sigma_1=H'_0, p=q=p'=q'=h'_0=0$ रखने तथा ξ को शून्य की ओर प्रवृत्त होने पर (2.2) निम्नलिखित में परिणत हो जाता है ।

$$K(s,x)=(sx)^{\rho-1}\, \mathbf{H}^{0,0:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{P,Q:R:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]}\begin{bmatrix} z_1\,(sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r\,(sx)^{\mu_r}\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

इस स्थिति में Ω-रूपान्तर सिंह [9, p. 71] द्वारा अधीत समाकल रूपान्तर में परिणत हो जाता है ।

(iii) (ii) में वर्णित प्रतिबन्धों के साथ-साथ $R=0$, रखने पर अष्टि निम्नलिखित में परिणत हो जाता है।

$$K(s,\ x)=(sx)^{\rho-1}\ \mathbf{H}^{0,\ 0\ :\ (M',\ N');\ \ldots;\ (M^{(r)},\ N^{(r)})}_{P,\ Q\ :\ [P',\ Q'];\ \ldots;\ [P^{(r)},\ Q^{(r)}]}\begin{bmatrix} z_1\ (sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r\ (sx)^{\mu_r} \end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

इस दशा में Ω-रूपान्तर यादव [14, p. 58] द्वारा अधीत समाकल रूपान्तर में परिणत हो जाता है।

(iv) (ii) में वर्णित प्रतिबन्धों के साथ-साथ (2.1) के $H^{(2)}$ में $r=2$ तथा $R=0$ लेने पर गुप्त [15, p. 18] द्वारा अधीत समाकल रूपान्तर प्राप्त होता है जिसमें दो चर समाविष्ट हैं अर्थात्

$$\phi\ (s)=\int_0^\infty K(s,\ x)\ f(x)\ dx,$$

जबकि

$$K(s,\ x)=(sx)^{\rho-1}\ \mathbf{H}^{0,\ 0\ :\ (M',\ N');\ (M'',\ N'')}_{P,\ Q\ :\ [P',\ Q'];\ [P'',\ Q'']}\left[\begin{matrix}\{(a_P;\alpha'_P,\alpha''_P)\}: \\ \{(b_Q;\beta'_Q;\beta''_Q)\}:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ \{(c''_{P''},\gamma''_{P''})\} \\ \{(d'_{Q'},\ \delta'_{Q'})\};\ \{(d''_{Q''},\ \delta''_{Q''})\}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} z_1\ (sx)^{\mu_1} \\ \\ z_r\ (sx)^{\mu_r}\end{matrix}\right]. \tag{3.3}$$

(v) (ii) में वर्णित प्रतिबन्धों के साथ यदि (2.1) में $r=2$ तथा $P=0=Q$ लें तो, अष्टि $K(s,x)$ निम्नलिखित में परिणत हो जाता है।

$$K(s,\ x)=(sx)^{\rho-1}\ \mathbf{H}^{M',\ N'}_{P',\ Q'}\left[z_1\ (sx)^{\mu_1}\ \middle|\ \begin{matrix}\{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\} \\ \{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\}\end{matrix}\right]\times$$

$$\mathbf{H}^{M'',\ N''}_{P'',\ Q''}\left[z_2\ (sx)^{\mu_2}\ \middle|\ \begin{matrix}\{(c''_{P''},\gamma''_{P''})\} \\ \{(d''_{Q''},\delta''_{Q''})\}\end{matrix}\right], \tag{3.4}$$

प्रसाद [16, p. 74]. द्वारा अधीत समाकल के संगत है।

(iv) (v) में वर्णित प्रतिबन्धों के साथ-साथ

$$N'=P'=0,\ \mu_1=Q'=2,\ z_1=1/2z^2,\ d_1=\tfrac{1}{2}\nu,\ =d'_2=-1/2\nu,\ \delta'_1=1,\ \delta'_2=M'$$

रखने पर संयोजक सूत्रों [17, p. 152] अर्थात्

$$z^{\alpha}\, J_{\nu}(x)=2^{\alpha}\, H_{0,\ 2}^{1,\ 0}\left[\frac{z^2}{4}\left|\left(\frac{\alpha+\nu}{2},\ 1\right),\left(\frac{\alpha-\nu}{2},\ 1\right)\right.\right], \tag{3.5}$$

के कारण रूपान्तर (2.1) निम्नलिखित के संगत है

$$\phi\,(s)=\int_0^{\infty} s(sx)^{\rho-1}\, J_{\upsilon}\,(zsx)\ \mathbf{H}_{P'',\ Q''}^{M'',\ N''}\left[z_2\,(sx)^{\mu_2}\left|\begin{matrix}\{(c''_{P''},\gamma''_{P''})\}\\ \{(d''_{Q''},\delta''_{Q''})\}\end{matrix}\right.\right] f(x)\,dx, \tag{3.6}$$

जो कि प्रसाद [16 p. 76] द्वारा प्राप्त $f(x)$ का $J—H$ रूपान्तर है ।

(vii) इसके अतिरिक्त (3.6) में $z=0=\nu$ रखने पर रूपान्तर

$$\phi\,(s)=\int_0^{\infty} (sx)^{\rho-1}\ \mathbf{H}_{P'',\ Q''}^{M'',\ N''}\left[z_2\,(sx)^{\mu_2}\left|\begin{matrix}\{(c_{P''},\gamma''_{P''})\}\\ \{(d_{Q''},\delta''_{Q''})\}\end{matrix}\right.\right] f(x)\,dx, \tag{3.7}$$

प्राप्त होता है जो वास्तव में प्रसाद [16, p. 76] द्वारा परिभाषित H-रूपान्तर है ।

(viii) (vii) के प्रतिबन्धों के साथ-साथ $\rho=1$ तथा (3.7) में प्राचलों γ''_j $(j=1,\ ...,\ P'')$ तथा δ''_j $(j=1,\ ...,\ Q'')$ को इकाई रखने पर निम्नलिखित रूपान्तर प्राप्त होता है :

$$\phi\,(s)=\int_0^{\infty} \mathbf{G}_{P'',\ Q''}^{M'',\ N''}\left[z_2\,(sx)^{\mu_2}\left|\begin{matrix}(C''_{P''})\\ (d''_{Q''})\end{matrix}\right.\right] f(x)\,dx, \tag{3.8}$$

जो कपूर एवं मसूद [18, p. 402]. द्वारा अधीत समाकल रूपान्तर है ।

(ix) (ii) के प्रतिबन्धों के साथ-साथ

$$R=P=Q=N'=P'=d_1=0,\ M'=Q'=\mu_1=\rho=\delta'_1=\gamma''_1=\ldots=\gamma''_{P''}=1$$

$$=\delta''_1=\ldots=\delta''_{Q''},\ \gamma=z_1=2,$$

रखने पर तथा संयोजक सूत्रों [17, p. 15], अर्थात्

$$\mathbf{H}^{1,\,0}_{0,\,1}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}\cdots\cdot\\(\alpha,\,1)\end{matrix}\right]=z^{\alpha}\,e^{-z}, \tag{3.9}$$

के कारण रूपान्तर

$$\phi\,(s)=\int_0^{\infty} e^{-asx}\,\mathbf{G}^{M'',\,N''}_{P'',\,Q''}\left[z_2\,(sx)^{\mu_2}\,\middle|\,\begin{matrix}(c''_{P''})\\(d''_{Q''})\end{matrix}\right] f(x)\,dx, \tag{3.10}$$

प्राप्त होता है जो पहले ही जयसवाल[19] द्वारा अधीत है।

4. विशिष्ट उपदशायें

इस खण्ड में (2.1) द्वारा परिभाषित Ω-रूपान्तर के कुछ और भली-भाँति ज्ञात तथा लाभदायक विशिष्ट उपदशाओं की चर्चा करेंगे।

(i) (3.1) में $R=P=Q=d'_1=0,\ \gamma=z_1=\mu=P=M'=Q'=\delta'_1=1$ रखने पर, Ω-रूपान्तर,तत्समक (3.9) के कारण, शास्त्रीय लाप्लास रूपान्तर में परिणत हो जाता है।

(ii) इसके अतिरिक्त (3.1) में $R=P=Q=N'=d'_1=0,\ \gamma=P'=z_1=\mu_1=\gamma'_1=\rho=\delta'_1=\delta'_2 1,\ M'=Q'=2,\ c'_1=\nu,\ d'_2=-1$ रखने तथा सूत्र

$$\mathbf{H}^{2,\,0}_{1,\,2}\left[x\,\middle|\,\begin{matrix}(\nu,\,1)\\(0,\,1),\,(\nu-1,\,1)\end{matrix}\right]=E_{\nu}\,(x), \tag{4.1}$$

का उपयोग करने पर जबकि $E_{\nu}(x)$ बुसब्रिज[20] द्वारा परिभाषित चरघातांकी समाकल फलन है भोंसले द्वारा[21] अधीत निम्नलिखित चरघातांकी समाकल रूपान्तर मिलता है

$$\phi\,(s)=\int_0^{\infty} E_{\nu}\,(sx)\,f(x)\,dx \tag{4.2}$$

(iii) (3.1) में $R=P=Q=N'=0,\ \gamma=P'=z_1=\mu_1=\gamma'_1=\delta'_1=\delta'_2=1,\ M'=Q'=2,\ \rho=m+1/2,\ c'_1=1-k,\ d_1=1/2+m,\ d_2=1/2-m$ रखने तथा परिणाम [17, p. 155] अर्थात्

$$\mathbf{H}_{1,\,2}^{2,\,0}\left[x\left|\begin{matrix}(1-k,\,1)\\(1/2+m,\,1),\,(1/2-m,\,1)\end{matrix}\right.\right]=e^{-x/2}\,W_{k,m}(x), \tag{4.3}$$

का उपयोग करने पर Ω-रूपान्तर[22] के संगत हो जाता है।

(iv) (3.1) में $R=P=Q=N'=0,\ \gamma=\rho=P'=z_1=\mu_1=\gamma'_1=\delta'_1=\delta'_2=1,\ M'=Q'=2,\ c'_1=-2k,\ d'_1=M-k,\ d'_2=-m-k$ रखने तथा परिणाम (4.3) का उपयोग करने पर हमें माइजर रूपान्तर[23] प्राप्त होता है।

(v) (3.1) में $R=P=Q=0,\ \gamma=\rho=z_1=\mu_1=\gamma'_1=\ldots=\gamma'_{P'}=\delta'_1=\ldots=\delta'_{Q'}=1$ रखने पर Ω-रूपान्तर कपूर[24] द्वारा अधीत व्यापीकृत लाप्लास रूपान्तर में परिणत हो जाता है।

(vi) (3.1) में $R=P=Q=N'=0,\ \gamma=\rho=z_1=\mu_1=1,\ M'=Q'=P'+1,\ \gamma'_j=\delta'_j\ (j=1,\ldots,P')=\delta'_{p+1}=1c'_j=m_j=k_j,\ d_j=n_j,\ d_{p'+1}=\rho'$ रखने पर हमें माइजर लाप्लास रूपान्तर मिलता है जिसको भिसे[25] ने परिभाषित किया है।

(vii) (3.1) में $R=P=Q=N'=P'=0,\ \gamma=\rho=M'=z_1=\delta'_1=\delta'_2=1,\ \mu_1=Q'=2,\ z_1=1/4,\ d_1=1/2\nu+1/4,\ d_2=1/4-1/2\nu$ रखने तथा $f(x)$ को $\sqrt{2}\,f(x)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर, परिणाम

$$z^{\alpha}J_{v}(x)=2^{\alpha}\,\mathbf{H}_{0,\,2}^{1,\,0}\left[z^2/4\left|\begin{matrix}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\\left(\frac{\alpha+\nu}{2},\,1\right)\left(\frac{\alpha-\nu}{2},\,1\right)\end{matrix}\right.\right], \tag{4.4}$$

के कारण हमें भली-भाँति ज्ञात हैंकल रूपान्तर प्राप्त होता है।

(viii) (3.1) में $R=P=Q=0,\ \gamma=N'=\rho=\gamma'_1=\gamma'_2=\delta'_1=\delta'_2=\delta'_3=\delta'_4=1,\ M'=P'=\mu_1=2,\ Q'=4,\ z_1=1/4,\ c_1=k-m+1/2\nu-1/4=1/2-c_2,\ d_1=1/4+1/2\nu+2m,\ d_2=1/4+1/2\nu,\ d_3=1/4-\frac{1}{2}\nu-2m,\ d'_4=1/4-1/2\nu$ रखने तथा $f(x)$ को $\sqrt{2}\,f(x)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर

$$\phi(s)=2^{-v}\int_0^{\infty}(sx)^{v+1/2}\,\psi_{v,k,m}\,(1/4\ s^2\ x^2)\,f(x)\,dx, \tag{4.5}$$

प्राप्त होता है जो रूपनारायण[26] द्वारा परिभाषित तथा अधीत हैंकल रूपान्तर का व्यापकीकरण है।

(ix) (3.1) में $R=P=Q=0,\ \rho=\gamma'_j\ (j=1,\ 1,\ldots,2=n)=\delta'_j\ (j=1,\ldots,2m)=1,\ r=1,\ z_1=1/4,\ \mu_1=2,\ M'=m=1/2Q',\ N'=n=1/2P'$

$$C_j = \begin{cases} c'_j & i \leqslant n \text{ के लिए} \\ 1/2 - c'_j - n & n < j \leqslant 2n \text{ के लिये} \end{cases};$$

$$d'_j = \begin{cases} d'_j & j \leqslant m \text{ के लिए} \\ 1/2 - d'_j - m & m < j \leqslant 2m \text{ के लिये} \end{cases}$$

रखने तथा $f(x)$ को $\sqrt{2}\, f(x)$, द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\phi\,(s) = \sqrt{2} \int_0^\infty G^{m,\,n}_{2n,\,2m} \left[1/4\, s^2\, x^2 \middle| \begin{matrix} c'_1, \ldots, c'_n, 1/2 - c' , \ldots, 1/2 - c'_n \\ d'_1, \ldots, d'_n, 1/2 - d'_1, \ldots, d'_n \end{matrix} \right] f\,(x)\, dx, \tag{4.6}$$

प्राप्त होता है जो रूपनारायण[26] अधीत हैंकल रूपान्तर का एक दूसरा व्यापकीकरण है ।

(x) (3.1) में $R = P = Q = 0$, $\gamma = \rho = N' = \gamma'_1 = \gamma'_2 = \delta'_j$ $(j = 1, \ldots, 4) = 1$, $z_1 = 1/4$, $\mu_1 = M' = P' = 2$, $Q' = 4$, $c'_1 = 4k - 3/2\nu + 1/4$, $c'_2 = 1/4 - 1/2\nu$, $d'_1 = k - m - 1/2\nu + 1/4$, $d'_2 = k + m - 1/2\nu + 1/4$, $d'_3 = 3k - m - 3/2\nu + 1/4$, $d'_4 = 3k + m - 3/2\nu + 1/4$, रखने तथा $f(x)$ को $\sqrt{2}\, f(x)$, द्वारा विस्थापित करने पर, एर्डेल्यी [27 vol I, p. 208] के एक परिणाम के कारण मेहरा[28] दिये गये हैंकल रूपान्तर का एक व्यापकीकरण प्राप्त होता है ।

(xi) (3.1) में $R = P = Q = N' = 0$, $c'_1 = m - m - \mu = d'_1$, $d'_2 = -\mu = \gamma = \rho = P' = z_1 = \mu_1 = \gamma'_1 = \delta'_1 = \delta'_2 = 1$, $M' = Q' = 2$ रखने पर परिणामस्वरूप Ω-रूपान्तर मैनरा[29] द्वारा परिभाषित तथा अधीत व्यापकीकृत लाप्लास रूपान्तर में परिणत हो जाता है ।

5. Ω-रूपान्तर का प्रतिलोम

इस अनुभाग में अनुभाग 2 में परिभाषित Ω-रूपान्तर का प्रतिलोमन सूत्र ज्ञात करेंगे ।

प्रमेय

यदि $\phi(s)$ $f(x)$ का Ω-रूपान्तर हो, तो

$$1/2\,[\,f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2\pi w} \lim_{T \to \infty} \int_{c-wT}^{c+wT} x^{\cdot u}\, \mu_r \prod_{i=1}^{r} H_0^{(i)}$$

$$\sum_{v_1, \cdots, v_r = 0}^{\infty} \frac{z_r \left\{ \rho + \sum_1^{v} (\sigma_i\, \rho_{vi}) - u \right\} / \mu_r}{\prod_{i=1}^{r} \left\{ \theta_i\,(\rho_{vi}) \dfrac{(-1)^{\,\rho_{vi}}}{v_i!} (\xi_i^{\,\rho vi} \right\}} \times$$

$$\frac{F(u)\,du}{H\left[\rho+\sum_{i=1}^{r}(\sigma_i\,\rho_{vi})-u\;:\;\frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}},\ldots,\frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right]} \tag{5.1}$$

जबकि

$$F(u)=\int_0^{\infty} s^{-u}\,\phi(s)\,ds,$$

तथा

$$H\left[\rho\;:\;\frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}},\ldots,\frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right]$$

$$=\mathbf{H}^{N^{(r)},\,M^{(r)}:\;0\,.\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r-1)},\,N^{(r-1)})}_{Q^{(r)}+P^{(r)},\,P^{(r)}+Q\,:\,R\,:\,[P',\,Q'],\,\ldots,\,[P^{(r-1)},\,Q^{r-1}]}$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\left(1-d^{(r)}_{Q^{(r)}}-\frac{\rho}{\mu_r}\delta^{(r)}_{Q^{(r)}}\;;\;\left(\frac{\mu_i}{\mu_r}\delta^{(r)}_{Q^{(r)}}\right)_{i=1,\ldots,r-1}\right)\right\}\\ \left\{\left(1-c^{(r)}_{P^{(r)}}-\frac{\rho}{\mu_r}\gamma^{(r)}_{P^{(r)}}\;;\;\left(\frac{\mu_i}{\mu_r}\gamma^{(r)}_{P^{(r)}}\right)_{i=1,\ldots,r-1}\right)\right\},\end{array}\right.$$

$$\left(a_P+\alpha^{(r)}_P\frac{\rho}{\mu_r}\;;\;\left(\alpha^{(i)}_P-\frac{\mu_i}{\mu_r}\alpha^{(r)}_P\right)_{i=1,\ldots,r-1}\right)\Big\}\;:$$

$$\left\{\left(b_Q+\beta^{(r)}_{Q^{(r)}}\frac{\rho}{\mu_r}\;;\;\left(\beta^{(i)}_Q-\frac{\mu_i}{\mu_r}\beta^{(r)}_Q\right)_{t=1,\ldots,r-1}\right)\right\}\;:\;\left\{\left(l_R-U^{(r)}_R\,\lambda^{(r)}_R\frac{\rho}{\mu_r}\;;\right.\right.$$

$$\left\{\left(c'_{P'},\gamma'_{P'}\right)\right\};\ldots;\left\{\left(c^{r-1}_{P^{r-1}},\gamma^{(r-1)}_{P^{(r-1)}}\right)\right\}$$

$$\left(U^{(i)}_R\lambda^{(i)}_R-\frac{\mu_i}{\mu_r}U^{(r)}_R\lambda^{(r)}_R\right)_{i=1,\ldots,r-1}\Big)\Big\}\;:\;\left\{\left(d'_{Q'},\delta'_{Q'}\right)\right\};\ldots;$$

$$\left.\left\{d^{(r-1)}_{Q^{(r-1)}},\delta^{(r-1)}_{Q^{(r-1)}}\right\}\right|\left.\begin{array}{c}\frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}}\\ \vdots\\ \frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\end{array}\right]. \tag{5.2}$$

यह प्रमेय निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है ।

(i) फलन $|x^{u-1}f(x)|$ तथा $|x^{-u}\,\phi(x)|$ $(u=cw+T,\ -\infty<T<+\infty)$ $L(0,\infty)$, में हैं

(ii) $f(x)$ बिन्दु $x=t$, $t>0$ के सामीप्य में विचरण वाला है

(iii) $$f(x)=\begin{cases} 0(x^{v}), \; Re\,(v)>0 \text{ लघु } x \text{ के लिये} \\ 0(e^{-v'x}), \; Re\,(v')>0 \text{ दीर्घ } x \text{ के लिये} \end{cases}$$

(iv) प्रतिबन्ध (2.6) सन्तुष्ट होते हैं,

(v) $$Re\left\{\rho-u+\sum_{i=1}^{r}\left(\overset{*}{\alpha}_1\,\mu_i+\sigma_i\frac{h_0^{(i)}}{H_0^{(i)}}\right)\right\}>0,\ |\arg z_i\, s^{\mu_i}|<\tfrac{1}{2}\pi V_i,$$

$V_i>0$ $i=1, \ldots, r$, के लिये

$$Re\left\{\rho-u+\sum_{i=1}^{r}(\mu_i\overset{*}{\beta}_i+\sigma_i\,\beta_i)\right\}<0,\ |\arg(\xi_i\, s^{\sigma_i})|<\tfrac{1}{2}\pi U_i$$

$U_i>0$ $i=1, \ldots, r$, के लिये

जबकि $U_i, V_i, \beta_i, \overset{*}{\alpha}_i, \overset{*}{\beta}_i$ क्रमशः (1.10), (2.4), (2.5), (2.6) तथा (2.7) में दिये जाते हैं,

(vi) $f(x)$ इस प्रकार का है कि इसका Ω-रूपान्तर अस्तित्व में है।

उपपत्ति

प्रमेय की परिकल्पना के अनुसार,

$$\phi(s)=\int_0^\infty (sx)^{\rho-1} H^{(1)}\,[\xi_1\,(sx)^{\sigma_1}; \ldots; \xi_r\,(sx)^{\sigma_r}]$$
$$\times H^{(2)}\,[z_1\,(sx)^{\mu_1}; \ldots; z_r\,(sx)^{\mu_r}]\,f(x)\,dx. \tag{5.3}$$

(5.3) के दोनों पक्षों को s^{-u} से गुणा करने तथा s के सापेक्ष में सीमाओं 0 तथा ∞ के बीच समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$F(u)=\int_0^\infty s^{-u}\,\phi(s)\,ds=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty (sx)^{\rho-1}\,H^{(1)}\,[\xi\,(sx)^{\sigma_1}, \ldots, \xi_r\,(sx)^{\sigma_r}]\right.$$
$$\left.\times H^{(2)}\,[z_1\,(sx)^{\mu_1}, \ldots, z_r\,(sx)^{\mu_r}]\,f(x)\,dx\right\} s^{-u}\,ds. \tag{5.4}$$

(1.7) की तरह $H^{(1)}$ को श्रेणी के रूप में रखने पर हम पाते हैं कि

$$F(u)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{r} H_0^{(i)}} \sum_{v_1,\ldots,v_r=0} \phi(\rho_{v_1},\ldots,\rho_{v_r}) \prod_{i=1}^{r} \{\theta_i(\rho_{vi}) \frac{(-1)^{v_i}}{v_i!} (x_i)^{\rho v_i}$$

$$\int_0^{\infty} x^{\rho+\sum_{i=1}^{r}(\sigma_i \rho_{iv})-1} f(x) \left\{\int_0^{\infty} s^{\rho+\sum_{i=1}^{r}(\sigma_i \rho_{vi})-u-1}\right.$$

$$\mathbf{H}^{0,0;0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{P,Q:R:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]}\left[\begin{array}{l}\{(a_P;(\alpha_P^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\\ \{(b_Q;(\beta_Q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\end{array}\right.$$

$$:(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ldots;\{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\}$$

$$\{(l_R;U_R^{(i)}\ \lambda_R^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ \ldots;\ (d^{(r)}_{Q^{(r)}},\delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\}$$

$$\left|\begin{array}{l} z_1\ (sx)^{\mu_1}\\ \vdots\\ z_r\ (sx)^{\mu_r}\end{array}\right] ds \left.\right\} dx, \tag{5.5}$$

बशर्ते कि समाकलन का क्रम परिवर्तन अनुमेय हो, आन्तरिक समाकल का मान निकालने के लिये हम निम्नलिखित परिणाम का उपयोग करते हैं

$$\int_0^{\infty} x^{\rho-1}\ \mathbf{H}^{0,0:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{P,Q:R:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]}\left[\begin{array}{l}\{(a_P;(\alpha_P^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\\ \{(b_Q;(\beta_Q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\end{array}\right.$$

$$\{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ldots;\{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\}$$

$$\{(l_R;U_R^{(i)}\ \lambda_R^{(i)})_{i=1,\ldots,r}\}:\{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots;\{(d^{(r)}_{Q^{(r)}},\delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\}$$

$$\left|\begin{array}{l} z_1\ (x)^{\mu_1}\\ \vdots\\ z_r\ (X)^{\mu_r}\end{array}\right] dx=\frac{1}{\mu_r}\, z_r^{-\rho/\mu_r}\, H\left[\rho:\ \frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}},\ \ldots,\ \frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right]$$

जबकि

$$H\left[\rho : \frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}}, \ldots, \frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right]$$ समीकरण (5.2) द्वारा दिया जाता है,

$$F(u) = \frac{1}{\mu_r \prod_{i=1}^{r} H_0^{'(i)}} \sum_{v_1,\ldots,v_r=0}^{\infty} \phi(\rho_{v1}, \ldots, \rho_{vr}) \prod_{i=1}^{r} \left\{\theta_i(\rho_{vi}) \frac{(-1)^{v_i}}{v_i!} (x_i)^{\rho v_i}\right\}$$

$$z_r^{-\left\{\rho + \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i \rho_{vi} - u\right\}/\mu_r} H\left[\rho + \sum_{i=1}^{r} (\sigma_i \rho_{vi}) - u : \right.$$

$$\left. \frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}}, \ldots, \frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right] \int_0^{\infty} x^{u-1} f(x)\, dx. \qquad (5.6)$$

अन्त में मेलिन प्रतिलोमन सूत्र[30] का (5.6) में उपयोग करने से उपपत्ति पूर्ण होती है।

(5.5) में समाकलन के क्रम परिवर्तन के औचित्य को सिद्ध करने के लिये हम देखते हैं कि s-समाकल (v) में वर्णित प्रतिबन्धों के कारण निरपेक्षतः अभिसारी है तथा x-समाकल (2.3) के प्रतिबन्धों के अन्तर्गत निरपेक्षतः अभिसारी है तथा परिणामस्वरूप प्राप्त समाकल इस परिकल्पना के अधीन निरपेक्षतः अभिसारी है कि $x^{u-1} f(x)$ $(0, \infty)$ में लेबेस्ग समाकलनीय है। इस लिये द लावली पुसिन प्रमेय [31, p. 204] के कारण समाकलन का क्रम परिवर्तन अनुमेय है।

6. प्रतिलोमन प्रमेय की विशिष्ट स्थितियां

जिस प्रकार (2.1) द्वारा परिभाषित Ω-रूपान्तर अधिकांश समाकल रूपान्तर का व्यापकीकरण करता है उसी प्रकार ऐसा लगता है कि ऊपर वर्णित प्रतिलोमन में भली-भाँति ज्ञात समाकल रूपान्तरों के प्रतिलोमन प्रमेय भी विशेष दशाओं में समाविष्ट हैं। यहाँ प्रतिलोमन प्रमेय की कुछ रोचक विशेष दशाओं की चर्चा करेंगे।

(i) $H^{(1)}$ में, $r=1=\sigma_1=H_0$, $p=q=p'=q'=h_0=0$ रखने पर तथा ξ के शून्य की ओर प्रवृत्ति होने एवं $\psi(s_1, \ldots, s_r)$, के हर में गामा फलन गुणकों में मिश्रित चिन्ह न होने पर प्रतिलोमन प्रमेय यादव [14, p. 71] के प्रतिलोमन प्रमेय में परिणत हो जाता है।

(ii) (3.2) में $r=2$, $R=P=Q=0$ रखने पर प्रसाद [16, p. 85] द्वारा दिया हुआ प्रतिलोमन प्रमेय मिलता है।

(iii) यदि $\phi(s)$ तथा $f(x)$ समीकरण (3.8) द्वारा जुड़े हों तो उनमें अन्तर्ग्रस्त विभिन्न प्राचलों के विशिष्ट मानों के लिये कपूर तथा मसूद [18, p. 40] द्वारा प्रदत्त निम्नांकित प्रतिलोमन प्रमेय होता है।

$$1/2\,[f(x+0)+f(x-0)]=\frac{1}{2\pi w}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iwT}^{c+iwT}$$

$$F(u)\,x^{-u}\frac{\prod_{j=M''+1}^{Q''}\Gamma(u-d_j'')\prod_{j=N''+1}^{P''}\Gamma(c_j''-u+1)}{\prod_{j=1}^{M''}\Gamma(1-u+d_j'')\prod_{j=1}^{N''}\Gamma(u-c_j'')}\,du \tag{6.1}$$

जबकि

$$F(u)=\int_0^{\infty}s^{-u}\,\phi(s)\,ds. \tag{6.2}$$

(iv) यदि $\phi(x)$ तथा $f(x)$ समीकरण (3.10) द्वारा जुड़े हों तो उनमें विशिष्टीकरण के फलस्वरूप निम्नलिखित प्रतिलोमन सूत्र मिलता है।

$$1/2\ f(x+0)+f(x-0)=\frac{1}{1\pi w}\lim_{T\to\infty}\int_{c-iwT}^{c+iwT}\mu_2\,z_2^{\rho-u/\mu_2}\,F(u)\,x^{-u}$$

$$\times\frac{1}{H\left[\rho-u:\dfrac{a}{z_2^{1/\mu_2}}\right]}\,du, \tag{6.3}$$

जबकि

$$F(u)=\int_0^{\infty}s^{-u}\,\phi(s)\,ds,\ \phi(s)$$

(3.11) द्वारा दिया जाता है और

$$H\left[\rho-u:\frac{a}{z_2^{1/\mu_2}}\right]$$

$$=\mathbf{H}^{1+N'',\,M''}_{Q'',\,1+P''}\left[\frac{a}{z_2^{1/\mu_2}}\left|\begin{matrix}\left\{\left(1-d''_{Q''}-\frac{\rho-u}{\mu_2},\ \frac{1}{\mu_2}\right)\right\}\\(0,1),\left\{\left(1-c''_{P''}-\frac{\rho-u}{\mu_2},\ \frac{1}{\mu_2}\right)\right\}\end{matrix}\right.\right] \tag{6.4}$$

बशर्ते समुचित प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होते हों। इस परिणाम की विवेचना जायसवाल[19] ने पहलेही की है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्त, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-function of one and Two variables with applications साउथ एशियन पब्लिशर्स न्यू दिल्ली, मद्रास 1982.
2. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comp. Math., 1964, **15**, 239-341.
3. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J. 1977,**17**, 221-226$_1$
4. मुखर्जी, एस० एन० तथा प्रसाद, वाई एन०, Mathematics Education, vol. (**1**), 1971, **5**, eq. **13**, p. 5-12.
5. बुशमैन, आर० जी०, **ज्ञानाभ**, 1977, **7**, 107-118.
6. बुशमैन, आर० जी०, Indian J. Math., 1978, **20**, 139-153.
7. बुशमैन, आर० जी०, Pure. Appl. Math. Sci., 1969, IX, 13-18.
8. बुशमैन, आर० जी०, Pre-prints Circulated, 1978.
9 सिंह, ए० के, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1980.
10. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 395-429.
11. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, Proc. Ind. Acad. Sci., 1972, **34**, 117-123.
12. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine angew. Math. 1976, **283-284** 265-275.
13. प्रसाद, वाई० एन० तथा नारायण, आर०, Bull. Tech. Univ. Instanbul, 1982, **36**, 173-189.
14. यादव, जे० एम० एस०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1978.
15. गुप्ता, आर० के०, **पी० एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1966.
16. प्रसाद, वाई० एन०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1969.
17. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The *H*-functions with applications in Statistics and other disciplines, विले ईस्टर्न लिमिटेड न्यू दिल्ली 1978.
18. कपूर, वी के० तथा मसूद, एस०, Proc. Camb. Phil. Soc., 1968, **64**, 399-406.
19. जयसवाल, एम० पी०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1968.

20. वुशब्रिज, जे० डब्लू०, Quart. Jour. Math. Oxford II Ser. I, 1950, 176-18

21. भोंसले, बी० आर०, Bull. Cal. Math. Soc., 1956, **48**, 55-63.

22. वर्मा, आर० एस०, Proc. Nat. Acad.Sci. (India), 1945, **20A**, 209-216.

23. माइजर, सी० एस०, Proc. Neder. Akad. Wetensch, 1941, **44**, 729-737.

24. कपूर, वी० के०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1966.

25. भिसे, बी० एम०, Jour. Lond. Math. Soc., 1959, **36**, 433-435.

26. रूपनारायण, Univ. Epolite Torino, Rend Sem. Mat. 1956-57, **16**, 269-300.

27. एर्डेल्यी, ए० तथा अन्य, Higher Transcendental Functions vol. I, II, III मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1953.

28. मेहरा, ए० एन०, **पी-एच० डी० थीसिस**, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, 1958.

29. मैनरा, वी० पी०, Bull. Cal. Math. Soc. 1961, **58**. 23-31.

30. टिश्मार्श, ई० सी०, Introduction to the Theory of Fourier Integral, द्वितीय संस्करण आक्सफोर्ड, 1962.

31. ब्रोमविच, टी० आई० जे०, An Introduction to the Theory of Infinite Series, लन्दन, 1931.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

हाइपरज्यामितीय फलनों से सम्बद्ध बहुविमीय भिन्नात्मक समाकलन आपरेटर-II

आर० के० सक्सेना तथा जी० सी० मोदी
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जून 29, 1983]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में गॉस के हाइपरज्यामितीय फलन से सम्बद्ध बहुविमीय भिन्नात्मक समाकलन आपरेटर के कतिपय गुण तथा विलोमन सूत्र दिये गये हैं।

Abstract

Multidimensional fractional integration operators associated with hypergeometric functions-II. *By* R. K. Saxena and G. C. Modi, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

This note deals with certain properties and inversion formulae for the multidimensional integration operators associated with Gauss's hypergeometric function.

1. प्रस्तावना

हाल ही में लेखकद्वय ने कतिपय बहुविमीय भिन्नात्मक समाकलन आपरेटरों की परिभाषा दी है और कतिपय महत्वपूर्ण गुण प्राप्त किये हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकों ने बहुविमीय मेलिन रूपान्तर के सम्प्रयोग द्वारा इन आपरेटरों के कुछ और गुणों की खोज की है।

हम आगे सर्वत्र संकेतन $f[(x)]$ का उपयोग $f(x_1, \ldots, x_n)$ को प्रदर्शित करने के लिये करेंगे।

सक्सेना तथा मोदी[1] ने बहुविमीय भिन्नात्मक समाकलन आपरेटरों को निम्नलिखित ढंग से परिभाषित किया है

$$I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\mu_i x_i^{-a_i-1}) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \left\{ t_i^{a_i} \, {}_2F_1 \left(\alpha_i, \beta_i; \gamma_i; \frac{c_i t_i^{\mu_i}}{x_i^{\mu_i}} \right) \right\}$$

$$\times \Phi\left[\left(\frac{t}{x}\right)\right] f[(t)] \, dt_1 \ldots dt_n \tag{1.1}$$

$$K \begin{matrix} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \\ (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \end{matrix} f[(x)]$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\mu_i x_i^{b_i}) \int_{x_1}^{\infty} \ldots \int_{x_n}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left\{ t_i^{-b_i-1} \, {}_2F_1 \left(\alpha_i, \beta_i; \gamma_i; \frac{c_i x_i^{\mu_i}}{t_i^{\mu_i}} \right) \right\}$$

$$\times \Phi\left[\left(\frac{x}{t}\right)\right] f[(t)] \, dt_1 \ldots dt_n \tag{1.2}$$

यहाँ पर अष्टि $\Phi[(x)]$ ऐसी है कि समाकल सार्थक हो, ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ गॉस का हाइपर-ज्यामितीय फलन हो। सारे a, b, c संम्मिश्र संख्यायें हैं तथा सारे μ वास्तविक तथा धनात्मक हैं।

निम्नलिखित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत आपरेटरों अस्तित्व होता है

(i) $1 \leqslant p_i, q_i < \infty, p_i^{-1} + q_i^{-1} = 1, \mu_i > 0, |\arg (i - c_i)| < \pi.$

(ii) $R(\alpha_i) > 0, R(a_i) > -q_i^{-1}, R(b_i) > -p_i^{-1}, R(\gamma_i - \alpha_i - \beta_i) > 0,$

$\gamma_i \neq 0, -1, -2, \ldots; i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$

(iii) $f[(x)] \in L_{pi}(0, \infty), i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$

अन्तिम प्रतिबन्ध हमें आश्वस्त करता है कि

$$I \begin{matrix} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma, \ldots, \gamma_n) \\ (a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \end{matrix} f[(x)]$$

तथा
$$K \begin{matrix} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots \gamma_n) \\ (b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n) \end{matrix} f[(x)]$$

दोनों का अस्तित्व है और दोनों ही $L_{pi}(0, \infty)$ से सम्बद्ध हैं। आगे i का विचरण 1 से n तक हुआ है।

2. बहुविमीय मेलिन रूपान्तर

आगे के विश्लेषण में जिस बहुविमीय मेलिन रूपान्तर-युग्म की आवश्यकता होगी उन्हें प्रचलों तक चरों के उपयुक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया जाता है

$$F[(x)]=Mf[(x)]=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty f[(x)]\prod_{i=1}^{n}(x_i^{s_i-1})\,dx_1\ldots dx_n \tag{2.1}$$

तथा $f[(x)]=\frac{1}{(2\pi i)^n}$

$$\int_{c'_1-i\infty}^{c'_1+i\infty}\cdots\int_{c'_n-i\infty}^{c'_n+i\infty}F[(s)]\prod_{i=1}^{n}(x_i^{-s_i})\,ds_1\ldots ds_n \tag{2.2}$$

एक पूर्ववर्ती प्रपत्र में लेखकों[4] ने निम्नलिखित प्रमेयों को सिद्ध किया है जिनकी आवश्यकता आगे आने वाले विश्लेषण में हो सकती है।

प्रमेय 2.1 यदि

$f[(x)]\in L_{p_i}(0,\infty)$, $1\leqslant p_i\leqslant 2$, [या $f[(x)]\in M_{p_i}(0,\infty)$ जिसके साथ $p_i>2$],

$p+q_i^{-1}=1$, $R(a_i)>-q_i^{-1}$, $R(\alpha_i)>0$, $R(\gamma_i-\alpha_i-\beta_i+1)>0$, $\gamma_i\neq 0,-1,-2,\ldots;$

तथा सन्निहित समाकल परम अभिसारी हों तो

$$MI\begin{matrix}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n),(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\\(a_1,\ldots,a_n),(c_1,\ldots,c_n),(\mu_1,\ldots,\mu_n)\end{matrix}f[(x)]$$

$$=Mf[(x)]\,K\begin{matrix}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n),(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)\\(a_1-s_1+1,\ldots,a_n-s_n+1),(c_1,\ldots,c_n),(\mu_1,\ldots,\mu_n)\end{matrix}1 \tag{2.3}$$

प्रमेय 2.2 यदि

$f\in L_{pi}(0,\infty)$, $1\leqslant p_i\leqslant 2$ [या $f\in M_{pi}(0,\infty)$, $p_i>2$], $R(\alpha_i)>0$, $R(b_i)>-1/p_i$

$R(\gamma_i-\alpha_i-\beta_i+1)>0$, $\gamma_i\neq 0,-1,-2,\ldots;$ $p_i^{-1}+p_i^{-1}=1$

तथा सन्निहित समाकल पूर्ण अभिसारी हों तो

$$MK\begin{matrix}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\\(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)\end{matrix} f[(x)]$$

$$= Mf[(x)]\; I\begin{matrix}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\\(b_1+s_1-1, \ldots, b_n+s_n-1), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)\end{matrix}\; 1 \tag{2.4}$$

3. विलोमन सूत्र

इस अनुभाग में हम बहुविमीय भिन्नात्मक समाकलन आपरेटरों के लिये दो प्रमेयों की स्थापना करेंगे ।

प्रमेय 3.1 यदि

$$I\begin{matrix}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\\(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)\end{matrix} f[(x)]=g[(x)], \tag{3.1}$$

तो $$f[(x)]=\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \prod_{i=1}^n t_i^{-1}\, g\,[(t)]\; h[(x/t)]\; dt_1 \ldots dt_n, \tag{3.2}$$

जहाँ $$h[(x)]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c'_1-i\infty}^{c'_1+i\infty}\ldots\int_{c'_n-i\infty}^{c'_n+i\infty} \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{-s_i}}{k[(s)]}\, ds_1 \ldots ds_n \tag{3.3}$$

तथा $$k[(s)]=K\begin{matrix}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\\(a_1-s_1+1, \ldots, a_n-s_n+1), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)\end{matrix}\; 1 \tag{3.4}$$

क्योंकि $f[(x)] \in L_{pi}\,(0, \infty)$, $1 \leqslant p_i \leqslant 2$, [या $f[(x)] \in M_{pi}\,(0, \infty)$ जिसके साथ $p_i > 2$],

$$p_i^{-1}+q_i^{-1}=1,\; R(a_i)>-q_i^{-1},\; R(\alpha_i)>0,$$
$$R(\gamma_i-\alpha_i-\beta_i+1)>0,\; \gamma_i \neq 0, -1, -2, \ldots,$$

तथा सन्निहित समाकल परम अभिसारी हैं । अपिट $\Phi[(x)]$ ऐसी है कि ये समाकल सार्थक हैं ।

उपपत्ति

(3.1) के दोनों पक्षों को

$$\prod_{i=1}^n x_i^{s_i-1}$$

से गुणा करने, 0 से ∞ तक x_i के प्रति समाकलित करने तथा इस प्रकार से प्राप्त परिणाम की (2.3) की सहायता से विवेचना करने पर हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है,

$$Mf[(x)] = \frac{Mg[(x)]}{k[(s)]}$$

बहुविमीय प्रतिलोम मेलिन रूपान्तर (2.2) का सम्प्रयोग करने पर हमें परिणाम (3.3) प्राप्त होता है।

इससे प्रमेय (3.1) की उपपत्ति पूरी हुई।

उपप्रमेय 3.1 यदि

$$\mathrm{I}^{(a_1, \ldots, a_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)] = g[(x)], \tag{3.5}$$

जहाँ $\mathrm{I}^{(a_1, \ldots, a_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)]$

$$= \prod_{i=1}^{n} (\mu_i x_i^{-a_i-1}) \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_n} \prod_{i=1}^{n} \left\{ t_i^{a_i} \, {}_1F_1\left(a_i; \gamma_i; \frac{c_i t_i^{\mu_i}}{x_i^{\mu_i}}\right) \right\}$$

$$\times \Phi\left[\left(\frac{t}{x}\right)\right] f[(t)] \, dt_1 \ldots dt_n, \tag{3.6}$$

तो $$f[(x)] = \int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^{n} t_i^{-1} \, g[(t)] \, h\left[\left(\frac{x}{t}\right)\right] dt_1 \ldots dt_n \tag{3.7}$$

जहाँ $$h[(x)] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c'_1-i\infty}^{c'_1+i\infty} \ldots \int_{c'_n-i\infty}^{c'_n+i\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-s_i}}{k[(s)]} \, ds_1 \ldots ds_n \tag{3.8}$$

$$K[(s)] = \mathrm{K}^{(a_1, \ldots, a_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1-s_1+1, \ldots, a_n-s_n+1), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} 1 \tag{3.9}$$

तथा $\mathrm{K}^{(a_1, \ldots, a_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)]$

$$=\prod_{i=1}^{n}(\mu_i x_i^{b_i})\int_{x_1}^{\infty}\cdots\int_{x_n}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left\{t_i^{-b_i-1}\,{}_1F_1\left(\alpha_i;\gamma_i;\frac{c_i x_i^{\mu_i}}{t_i^{\mu_i}}\right)\right\}$$

$$\times\,\Phi\left[\left(\frac{x}{t}\right)\right]f[(t)]\,dt_1\ldots dt_n \qquad (3.10)$$

क्योंकि $f[(x)]\in L_{pi}(0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant 2$ [या $f[(x)]\in M_{pi}(0,\infty), p_i>2$],

$p_i^{-1}+p_i^{-1}=1$, $R(a_i)>q_i^{-1}$, $R(\alpha_i)>0$, $R(\gamma_i-\alpha_i+1)>0$, $\gamma_i\neq 0, -1, -2, \ldots;$

सन्निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हैं तथा अष्टि $\phi[(x)]$ ऐसी है कि समाकल सार्थक हैं।

उपप्रमेय 3.2 यदि

$$\mathbf{I}_{(a_1,\ldots a_n),(-1/4,\ldots,-1/4),(\mu_1,\ldots,\mu_n)}^{(\gamma_1+1,\ldots,\gamma_n+1)}f[(x)]=g[(x)], \qquad (3.11)$$

जहाँ
$$\mathbf{I}_{(a_1,\ldots,a_n),(-1/4,\ldots,-1/4),(\mu_1,\ldots,\mu_n)}^{(\gamma_1+1,\ldots,\gamma_n+1)}f[(x)]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}[\mu_i 2^{\gamma_1}\,\Gamma(1+\gamma_i)\,x_i^{\gamma_i-a_i-1}]$$

$$\times\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_n}\prod_{i=1}^{n}\left\{t_i^{a_i-\gamma_i}J_{\gamma_i}\left(\frac{t_i^{\mu_i/2}}{x_i^{\mu_i/2}}\right)\right\}$$

$$\Phi\left[\left(\frac{t}{x}\right)\right][f(t)]\,d_1\ldots d_n, \qquad (3.12)$$

तो
$$f[(x)=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}t_i^{-1}g[(t)]\,h\left[\left(\frac{x}{t}\right)\right]dt_1\ldots dt_n \qquad (3.13)$$

जहाँ
$$h[(x)]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c'_1-i\infty}^{c'_1+i\infty}\cdots\int_{c'_n-i\infty}^{c'_n+i\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i^{s_i}}{k[(s)]}ds_1\ldots ds_n, \qquad (3.14)$$

$$k[(s)]=\mathbf{K}_{(a_1-s_1+1,\ldots,a_n-s_n+1),(-1/4,\ldots,-1/4),(\mu_1,\ldots,\mu_n)}^{(\gamma_1+1,\ldots,\gamma_n+1)}1, \qquad (3.15)$$

तथा $$\mathbf{K}^{(\gamma_1+1,\ \ldots,\ \gamma_n+1)}_{(b_1,\ \ldots,\ b_n),\ (-1/4,\ \ldots,-1/4),\ (\mu,\ \ldots,\ \mu_n)} f[(x)]$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\,[2^{\gamma_i}\mu_i\, x_i^{b_i-\gamma_i}\ \Gamma(1+\gamma_i)]$$

$$\times\int_{x_1}^{\infty}\cdots\int_{xn}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\left\{t_i^{\gamma_i-b_i-1}\ J_{\gamma_i}\left(\frac{x_i^{\mu_i/2}}{t_i^{\mu_i/2}}\right)\right\}$$

$$\Phi\ \left[\left(\frac{x}{t}\right)\right]\ f\,[(t)]\ dt_1\ \ldots\ dt_n, \tag{3.16}$$

क्योंकि $f[(x)]\in L_{pi}\ (0,\infty)$, $1\leqslant p_i\leqslant 2$ [या $f[(x)]\in M_{pi}\ (0,\infty)$ के साथ $p_i>2$],

$p_i^{-1}+q_i^{-1}=1$, $R(a_i)>-q_i^{-1}$, $R(\gamma_i+2)>0$, $\gamma_i\neq-1,-2,\ldots$;

सन्निहित समाकल परम अभिसारी हैं तथा अष्टि $\phi[(x)]$ ऐसी है कि समाकल सार्थक हैं।

इसी प्रकार से बढ़ने पर तथा (2.3) के स्थान पर (2.4) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है।

प्रमेय 3.2 यदि

$$K^{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n),\ (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n),\ (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n)}_{(b_1,\ \ldots,\ b_n),\ (c_1,\ \ldots,\ c_n),\ (\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n)} f[(x)]=n[(x)], \tag{3.17}$$

तो $$f[(x)]=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\prod_{i=1}^{n}t_i^{-1}\ n\,[(t)]\ g\ \left[\left(\frac{x}{t}\right)\right]\ dt_1\ \ldots\ dt_n, \tag{3.18}$$

जहाँ $$g[(x)]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c'_1-i\infty}^{c'_1+i\infty}\cdots\int_{c'n-i\infty}^{c'_n+i\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i^{-s_i}}{r[(s)]}\ ds_1\ \ldots\ ds_n, \tag{3.19}$$

तथा $$[(s)]=\mathbf{I}^{(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n),\ (\beta_1,\ \ldots,\ \beta_n),\ (\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_n)}_{(b_1+s_1-1,\ \ldots,\ b_n+s_n-1),\ (c_1,\ \ldots,\ c_n),\ (\mu_1,\ \ldots,\ \mu_n)}\ 1, \tag{3.20}$$

क्योंकि $f[(x)]\in L_{pi}\ (0,\infty)$, $1\leqslant p_i\leqslant 2$ [या $f\in M_{pi}\ (0,\infty)$, $p_i>2$],

$$p_i^{-1}+q_i^{-1}=1,\ R(a_i)>-q_i^{-1},\ R(\alpha_i)>0,\ R(\gamma_i-\alpha_i-\beta_i+1)>0,\ \gamma_i\neq 0, -1, -2; \ldots;$$

तथा सन्निहित समाकल परम अभिसारी हैं । अष्टि $\phi[(x)]$ ऐसी है कि समाकल सार्थक हों ।

उपप्रमेय 3.3 यदि

$$\mathbf{K}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_1), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)]=n[(x)], \tag{3.21}$$

तो
$$f[(x)]=\int_0^{\prime} \ldots \int_0^{i} \prod_{i=1}^{n} t_i^{-1}\, n\,[(t)]\, g\left[\left(\frac{x}{t}\right)\right] dt_1 \ldots dt_n, \tag{3.22}$$

जहाँ
$$g\,[(x)]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c'_1 i-\infty}^{c'_1+i\infty} \ldots \int_{c'_n-i\infty}^{c'_n+i\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{-s_i}}{r[(s)]}\, ds_1 \ldots ds_n, \tag{3.23}$$

तथा
$$r\,[(s)]=\mathbf{I}^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1+s-1, \ldots, b_n+s_n-1), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} 1, \tag{3.24}$$

क्योंकि $f[(x)] \in L_{pi}(0, \infty)$, $1 \leqslant p_i \leqslant 2$ [या $f \in M_{pi}(0, \infty)$; $p_i>2$]

$$p_i^{-1}+q_i^{-1}=1,\ R(a_i)>-p_i^{-1},\ R(\alpha_i)>0,\ R(\gamma_i-\alpha_i+1)>0,\ \gamma_i\neq 0, -1, -2, \ldots:$$

सन्निहित समाकल परम अभिसारी हैं तथा अष्टि $\phi[(x)]$ ऐसी है कि समाकल सार्थक हैं ।

उपप्रमेय 3.4 यदि

$$\mathbf{K}^{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (-1/4, \ldots, -1/4), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)]=n[(x)] \tag{3.25}$$

तो
$$f[(x)]=\int_0^{\infty} \ldots \int_0^{\prime} \prod_{i=1}^{n} t_i^{-1}\; n\,[(t)]\; g\left[\left(\frac{x}{t}\right)\right] dt_1, \ldots, dt_n, \tag{3.26}$$

जहाँ
$$g\,[(x)]=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{c'_1+i}^{c'_1+i\infty} \ldots \int_{c'_n-i\infty}^{c'_1+i\infty} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{s_i}}{r[(s)]}\, ds_1 \ldots ds_n, \tag{3.27}$$

तथा $r\,[(s)]= \mathrm{I}^{(\gamma_1+1,\,\ldots,\,\gamma_n+1)}_{(b_1+s_i-1,\,\ldots,\,b_n+s_n-1),\,(-1/4,\,\ldots,\,-1/4),\,(\mu_1\,\ldots,\,\mu_n)}\;1,$ (3.28)

क्योंकि $f[(x)]\in L_{pi}\,(0,\,\infty)$, $1\leqslant p_i\leqslant 2$, [या $f[(x)]\in M_{pi}\,(0,\,\infty)$ के साथ $p_i>2$],

$$p_i^{-1}+q_i^{-1}=1,\; R(a_i)>-q_i^{-1},\; R(\gamma_i+2)>0,\; \gamma_i\neq -1,\,-2,\,\ldots;$$

सन्निहित समाकल परम अभिसारी हैं तथा अष्टि $\phi[(x)]$ ऐसी है कि समाकल सार्थक हैं।

यदि हम प्रमेय 3.1 तथा 3.2 में c_i के स्थान पर c_i/β_i लें तो $\beta\to\infty$ क्योंकि $i\in\{1,\,2,\,\ldots,\,n\}$ होने दें तो उपप्रमेय (3.1) तथा (3.2) प्राप्त होते हैं जब कि उपप्रमेय 3.2 तथा 3.4 को तब प्राप्त किया जा सकता है यदि हम गॉस के हाइपरज्यामितीय फलन को बेसेल फलन में समानीत कर दें और c_i तथा γ_i के स्थान पर क्रमशः $\dfrac{-1}{4a_i\beta_i}$ तथा γ_i+1 रखें और $a_i\to\infty$, $\beta_i\to\infty$ रखें क्योंकि $1\leqslant i\leqslant n$.

यह रोचक प्रेक्षण होगा कि यदि हम $\phi[(x)]=1$ लें तथा β_i+m_i के स्थान पर β_i रखें तथा $x_i\to 0$ क्योंकि $2\leqslant i\leqslant n$, होने दें तो उपर्युक्त प्रमेय 3.1 तथा 3.2 से भिन्नात्मक समाकलन आपरेटरों के लिये जिनमें कल्ला तथा सक्सेना[1] का हाइपरज्यामितीय फलन सन्निहित है, फल प्राप्त होते हैं।

4. बहुविमीय आपरेटरों (1.1) तथा (1.2) के सामान्य गुण

आपरेटरों की परिभाषा से निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i}\, \mathrm{I}^{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n),\,(\beta_1,\,\ldots,\,\beta_n),\,(\gamma_1,\,\ldots,\,\gamma_n)}_{(a_1,\,\ldots,\,a_n),\,(c_1,\,\ldots,\,c_n),\,(\mu_1\,,\ldots,\,\mu_n)}\, f[(x)]$$

$$= \mathrm{I}^{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n),\,(\beta_1,\,\ldots,\,\beta_n),\,(\gamma_n,\,\ldots,\,\gamma_n)}_{(a_1-\delta_1,\,\ldots,\,a_n-\delta_n),\,(c_1,\,\ldots,\,c_n),\,(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_n)}\, \prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i}\, f[(x)] \qquad (4.1)$$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i}\, \mathrm{K}^{(a_1,\,\ldots,\,\alpha_n),\,(\beta_1,\,\ldots,\,\beta_n),\,(\gamma_1,\,\ldots,\,\gamma_n)}_{(b_1,\,\ldots,\,b_n),\,(c_1,\,\ldots,\,c_n),\,(\mu_1,\,\ldots,\,\mu_n)}\, f[(x)]$$

$$= \mathrm{K}^{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n),\,(\beta_1,\,\ldots\,\beta_n),\,(\gamma_1,\,\ldots,\,\gamma_n)}_{(b_1+\delta_1,\,\ldots,\,b_n+\delta_n),\,(b_1,\,\ldots,\,c_n),\,(\mu_1\,\ldots,\,\mu_n)}\, \prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta_i}\, f[(x)] \qquad (4.2)$$

$$x_i^{\delta_i}\, \mathrm{I}^{(\alpha_1\,\ldots,\,\alpha_n),\,(\beta_1,\,\ldots,\,\beta_n),\,(\gamma_1,\,\ldots,\,\gamma_n)}_{(a_1\,\ldots,\,a_2),\,(c_1,\,\ldots,\,c_n),\,(\gamma_1,\,\ldots,\,\gamma_n)}\, f[(x)]$$

$$= I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - \delta_i, a_{i+1}, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} x_i^{\delta_i} f[(x)] \quad (4.3)$$

जहाँ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$x_i^{\delta_i} K^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)]$$

$$= K^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i + \delta_i, b_{i+1}, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} x_i^{\delta_i} f[(x)] \quad (4.4)$$

जहाँ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1 \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(1/x)]$$

$$= K^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1+1, \ldots, a_n+1), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n} f[(x)] \quad (4.5)$$

यदि $$I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(dx)] = g[(x)] \quad (4.6)$$

तो $$I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(dx] = g[(dx)] \quad (4.7)$$

तथा $$I^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1 \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f(x_1, \ldots, d_i x_i, x_{i+1}, \ldots x_n)$$

$$= g(x_1, \ldots, x_{i-1}, d_i x_i, x_{i+1}, x_n) \quad (4.8)$$

जहाँ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

यदि $$K^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(x)] = g[(x)] \quad (4.9)$$

तो $$K^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f[(dx)] = g[(dx)] \quad (4.10)$$

तथा $$\mathrm{K}^{(a_1, \ldots, a_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(b_1, \ldots, b_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots \mu_n)} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, d_i x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$= g\,(x_i, \ldots, x_{i-1}, d_i x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \qquad (4.11)$$

$$\mathrm{I}^{(a_1, \ldots, a_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_n), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)} f(x_1, \ldots, x_r, 1/x_{r+1}, \ldots, 1/x_n)$$

$$= \mathrm{I}^{(a_1, \ldots, a_n), (\beta_1, \ldots, \beta_r), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1, \ldots, a_r), (c_1, \ldots, c_r), (\mu, \ldots, \mu_r)}$$

$$\times \mathrm{K}^{(a_{r+1}, \ldots, a_n), (\beta_{r+1}, \ldots, \beta_n), (\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_n)}_{(a_{r+1}+1, \ldots, a_n+1), (c_{r+1}, \ldots, c_n), (\mu_{r+1}, \ldots, \mu_n)} f\,[(x)] \qquad (4.12)$$

$$= \mathrm{K}^{(a_1, \ldots, a_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n), (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}_{(a_1+1, \ldots, a_n+1), (c_1, \ldots, c_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)}$$

$$\times f(1/x_1, \ldots, 1/x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad (4.13)$$

जहाँ $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

निर्देश

1. कल्ला, एस० एल० तथा सक्सेना, आर० के०, Math. Zeit.,1969, **108**, 231-34.

2. सक्सेना, आर० के० तथा मोदी, जी ०सी०, Nat. Acad. Sci. Letters, 1980, **5**, 135-157

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 1, 1985

किसी व्यापक अबीजीय फलन का उपगामी प्रसार

जी० पी० गौतम तथा ए० एन० गोयल
गणित विभाग, राजस्थान युनिवर्सिटी, जयपुर

[प्राप्त—अक्टूबर 17, 1982]

सारांश

मान्य प्रतिबन्धों के अन्तर्गत n-चरों वाले एक व्यापक अ-बीजीय फलन का उपगामी प्रसार दिया गया है।

Abstract

On asymptotic expansion of a general transcendent. *By* G. P. Gautam and A. N. Goyal, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

The asymptotic expansion of a general transcendental function of n-variables has been given with proper conditions of validity.

1. विषय प्रवेश

विचाराधीन फलन निम्नलिखित (1.1) द्वारा परिभाषित है।

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{c1} \cdots \int_{cn} f(s_1, \ldots, s_n) \prod_{k=1}^{n} \{ f_k(s_k)\, x_k^{-s_k}\, ds_k \} \tag{1.1}$$

जबकि प्रत्येक ($k=1, \ldots, n$ के लिये)

(a)
$$f(s_1, \ldots, s_n) = \left\{ \prod_{j=1}^{p} \Gamma \left[1 - a_j + \sum_{k=1}^{n} a_j^{(k)} (s_k - 1) \right] \cdot \prod_{j=1}^{q} \Gamma \left(b_j - \sum_{k=1}^{n} \beta_j^{(k)} s_k \right) \right\}^{-1} \tag{1.2}$$

$$f_k(s_k)=\frac{\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)}s_k)\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma[1-d_j^{(k)}+\delta_j^{(k)}(s_k-1)]}{\prod_{j=1}^{p_k}\Gamma[1-e_j^{(k)}+\theta_j^{(k)}(s_k-1)]\prod_{j=1}^{q_k}\Gamma(f_j^{(k)}-\phi_j^{(k)}s_k)} \tag{1.3}$$

तथा रिक्त गुणनफल

$$(\text{i. e. } \prod_{j}^{n},\ n < j)$$

को इकाई माना जाता है,

(b) p, q, m_k, n_k, p_k, q_k अनृणात्मक पूर्णांक हैं,

(c) $x_k \neq 0$ तथा प्राचल

$$a_j,\ \alpha_j^{(k)},\ b_j,\ \beta_j^{(k)},\ c_j^{(k)},\ \gamma_j^{(k)},\ d_j^{(k)},\ \delta_j^{(k)}$$

सम्मिश्र संख्या हैं।

(d) $i=\sqrt{-1}$ तथा कंटूर C_k लूपों वाले s_k-समतल में स्थित काल्पनिक अक्ष के समान्तर सरल रेखा है जो आवश्यकतानुसार यह सुनिश्चित करता है कि

$$\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)}s_k)$$

के पोल इसकी दायीं ओर तथा

$$\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma[1-d_j^{(k)}+\delta_j^{(k)}(s_k-1)]$$

के पोल इसकी बायीं ओर हैं।

Γ-फलन के उपगामी प्रसार [1, 13.6] का उपयोग करने पर जब कि $s_k=\sigma_k+it_k$ एवं $|t_k|\to\infty$ (C_k पर), हम पाते हैं कि

$$f(s_1,\ldots,s_k)\,f_k(s_k)\,x_k^{-s_k}$$

$$=|t_k|^{\sigma_k(P_k+Q_k)-Q_k+M_k}\exp\,[it_k\{(P_k+Q_k)(\log|t_k|-1)$$

$$-\log(x_k w_k)+tQ_k\arg s_k+iP_k\arg(-s_k)\}][A_k+0(|t_k|)^{-1})] \tag{1.4}$$

जबकि

$$P_k=\sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{m_k}\gamma_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{q_k}\phi_j^{(k)},$$

$$Q_k=-\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{n_k}\delta_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{p_k}\theta_j^{(k)},$$

$$M_k=R_k+\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n}\{(1-s_i)\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(i)}+s_i\sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(i)}\},$$

$$R_k=\sum_{j=1}^{p}(aj-\tfrac{1}{2})-\sum_{j=1}^{q}(b_j-\tfrac{1}{2})+\sum_{j=1}^{m_k}(c_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})-\sum_{j=1}^{n_k}(d_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})$$

$$+\sum_{j=1}^{p_k}(e_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})-\sum_{j=1}^{q_k}(f_j^{(k)}-\tfrac{1}{2}),$$

$$w_k=\prod_{j=1}^{p}\alpha_j^{(k)\,\alpha_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{(k)\,-\beta_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{m_k}\gamma_j^{(k)\,\gamma_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{n_k}\delta_j^{(k)\,-\delta_j^{(k)}}$$

$$\prod_{j=1}^{p_k}\theta_j^{(k)\,\theta_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{q_k}\phi_j^{(k)\,-\phi_j^{(k)}},$$

और A_k एक अचर है जिसका एक मान दीर्घ धनात्मक t_k तथा दूसरा दीर्घ ऋणात्मक t_k के लिये है।

अनुभाग 3 के प्रमेय के प्रतिबन्ध (i) का (1.4) में उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$f(s_1, \ldots, s_n)f_k(s_k)\,x_k^{-s_k}$$

$$=|t_k|^{(\sigma_k-\frac{1}{2})D_k}\exp[it_k\{D_k(\log|t_k|-1)-\log(x_k w_k)\}]\;.\;[A_k+o(|t_k|^{-1})].$$

यह प्रदर्शित करता है कि (1.1) में समाकल अभिसरित होता है यदि $\sigma_k<\frac{1}{2}, x_k>0$ तथा $D_k>0$.

2. s_k-समतल में $f(s_1, \ldots, s_n)f_k(s_k)$ का आचरण

$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)=\pi\operatorname{cosec}(\pi z)$ का (1.2) तथा (1.3) में उपयोग करने से हमें मिलता है कि

$$f(s_1, \ldots, s_n)\,f_k(s_k)=(\text{g. f.})\,(\text{s. f.})\,\pi^{-p+m_k-q_k} \tag{2.1}$$

जबकि गामा गुणक (g.f) तथा ज्या गुणक (s.f) निम्नलिखित हैं

$$(\text{g. f.})=\frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-\beta j+\beta_j^{(k)}s_k)\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma[1-d_j^{(k)}+\delta_j^{(k)}(s_k-1)]}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma[1-A_j+\alpha_j^{(k)}(s_k-1)]\prod_{j=1}^{p_k}\Gamma[1-e_j^{(k)}+\theta_j^{(k)}(s_k-1)]}$$

$$\cdot\frac{\prod_{j=1}^{q_k}\Gamma(1-f_j^{(k)}+\phi_j^{(k)}s_k)}{\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma(1-c_j^{(k)}+\gamma_j^{(k)}s_k)} \tag{2.2}$$

$$(\text{s. f.})=\frac{\prod_{j=1}^{q}\sin\pi(B_j-\beta_j^{(k)}s_k)\prod_{j=1}^{q_k}\sin\pi(f_j^{(k)}-\phi_j^{(k)}s_k)}{\prod_{j=1}^{m_k}\sin\pi(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)}s_k)} \tag{2.3}$$

$$A_j=a_j-\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n}\alpha_j^{(i)}(s_i-1),\ B_j=b_j-\sum_{i=1,\,i\neq k}^{n}\beta_j^{(i)}s_i.$$

गामा फलन का फाक्स [2, p. 4.18] के समान उपगामी प्रसार का (2.2) में उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$(\text{g. f.})=F.\exp\{M_k\log s_k+N_k-s_k\log w_k+s_k(P_k+Q_k)$$
$$\cdot\ (\log s_k-1)-Q_k\log s_k\} \tag{2.4}$$

जबकि M_k, N_k, w_k, P_k, Q_k वही है जो (1.4) में दिया है F फाक्स द्वारा उपर्युक्त पत्र में परिभाषित "F प्रकार का एक फलन" है तथा N_k, s_k, से स्वतन्त्र एक अचर है; वास्तव में

$$N_k=\sum_{j=1}^{p}(A_j-\tfrac{1}{2})\log\alpha_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{q}(B_j-\tfrac{1}{2})\log\beta_j^{(k)}$$

$$+\sum_{j=1}^{m_k}(c_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})\log\gamma_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{n_k}(d_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})\log\delta_j^{(k)}$$

$$+\sum_{j=1}^{p_k}(e_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})\log\theta_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{q_k}(f_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})\log\phi_j^{(k)}$$

$$+\sum_{j=1}^{p} a_j^{(k)} \log a_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{n_k} \delta_j^{(k)} \log \delta_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{p_k} \theta_j^{(k)} \log \theta_j^{(k)}.$$

आगे के अनुभाग के प्रमेय के प्रतिबन्ध (i) का (2.4) में उपयोग से निम्नलिखित मिलता है

$$(\text{g. f.}) = F.\exp\left\{N_k + s_k \log \alpha_k + s_k D_k (\log s_k D_k - 1) - \frac{D_k}{2} \log s_k\right\},$$

जो थोड़ा सरलीकरण तथा अचर पद $N_k + \frac{1}{2}\log D_k$ का F में अवशोषण करने पर निम्नलिखित बन जाता है।

$$(\text{g. f.}) = F.s_k^{(1-D_k)/2}\, \Gamma(D_k s_k)\, \alpha_k^{s_k} \tag{2.5}$$

माना $s_k = \sigma_k + it_k$, जबकि σ_k स्थिर हैं तथा t_k वृहत धनात्मक या ऋणात्मक है। यह देखना सरल है कि

$$\sin \pi(B_j - \beta_j^{(k)} s_k) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\,[\exp\{i\pi(B_j - \beta_j^{(k)} s_k)\}]\,[1 + A.\,I.\, e^{-2\pi\, t_k R(\beta_j^{(k)})}] \\ \\ -\frac{1}{2i}\,[\exp\{-i\pi(B_j - \beta^{(k} s_k)\}]\,[1 + \frac{1}{A.I} e^{2\pi\, t_k R(\beta_j^{(k)})}] \end{cases} \tag{2 6}$$

जहाँ A t_k से स्वतन्त्र एक अचर है और I केवल काल्पनिक संख्या है। और भी, माना

$$c_k = 2\pi \min R(\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_q^{(k)}, \gamma_1^{(k)}, \ldots, \gamma_{m_k}^{(k)}, \phi_1^{(k)}, \ldots, \phi_{q_k}^{(k)}).$$

आगे के खण्ड के प्रमेय के प्रतिबन्ध (iii) से हम पाते हैं कि

$$0 < c_k < 2\pi\, R(\beta_j^{(k)}).$$

और भी t_k $|t_k|$ अथवा $-|t_k|$ के बराबर है जैसा कि $t_k >$ अथवा <0. इसलिये (2.6) से जब $|t_k| \to \infty$, हम पाते हैं कि

$$\sin \pi(B_j - \beta_j^{(k)} s_k) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\,[\exp\{i\pi(B_j - \beta_j^{(k)} s_k)\}]\,[1 + 0\,(e^{-c_k|t_k|})] \\ \\ -\frac{1}{2i}\,[\exp\{-i\pi(B_j - \beta_j^{(k)} s_k)\}]\,[1 + 0\,(e^{-c_k|t_k|})] \end{cases}$$

जैसा कि $t_k >$ अथवा <0. इस तथा इसी के समान परिणामों का (2.3) में उपयोग करने तथा सरल करने पर निम्नलिखित फल मिलता है

$$(\text{s. f.}) = \begin{cases} (2i)^{m_k - q - q_k} [\exp \{i\pi (U_k - P_k s_k)\}] [1 + 0 (e^{-c_k|t_k|})] \\ (-2i)^{m_k - q - q_k} [\exp \{-i\pi (U_k - P_k s_k)\}] [1 + 0 (e^{-c_k|t_k|})] \end{cases} \quad (2.7)$$

जैसा कि $t_k >$ अथवा <0, जबकि

$$U_k = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{j=1}^{m_k} c_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{q_k} f_j^{(k)} - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} s_k \left(\sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} \right).$$

आगे के अनुभाग के प्रमेय के प्रतिबन्ध (i) का (2.7) में उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$(\text{s. f.}) = \begin{cases} (2i)^{m_k - q - q_k} [\exp \{\frac{i\pi}{2} (K_k - D_k s_k)\}] [1 + 0 (e^{-c_k|t_k|})] \\ (-2i)^{m_k - q - q_k} [\exp \{-\frac{i\pi}{2} (K_k - D_k s_k)\}] [1 + 0 (e^{-c_k|t_k|})] \end{cases} \quad (2.8)$$

जैसा कि $t_k >$ अथवा <0.

किन्तु $(2i)^{m_k - q - q_k}$ पूर्ण काल्पनिक या पूर्ण वास्तविक होगा जैसा कि $q + q_k - m_k$ विषम या सम हो। इसलिये चाहे $t_k >$ अथवा <0, (2.8) का प्रत्येक व्यंजक निम्नलिखित में परिणत हो जाता है

$$\begin{cases} \lambda_k [\sin \{\frac{\pi}{2} (K_k - D_k s_k)\}] [1 + 0 (e^{-c_k|t_k|})], \; q + q_k - m_k \text{ विषम हो} \\ \mu_k [\cos \{\frac{\pi}{2} (K_k - D_k s_k)\}] [1 + 0 (e^{-c_k|t_k|})], \; q + q_k - m_k \text{ सम हो} \end{cases} \quad (2.9)$$

जबकि λ_k तथा μ_k निम्नलिखित द्वारा दी जाने वाली

$$\lambda_k = (2i)^{m_k - q_k - q + 1}, \; \mu_k = 2 (2i)^{m_k - q_k - q}.$$

वास्तविक संख्यायें हैं।

(2.9) से

$$(\text{s. f.})=\begin{cases}[\sin\{\frac{\pi}{2}(K_k-D_k s_k)\}]\{\lambda_k+0(e^{-c_k|t_k|})\} \\ [\cos\{\frac{\pi}{2}(K_k-D_k s_k)\}]\{\mu_k+0\ e^{-c_k|t_k|})\}\end{cases} \tag{2.10}$$

जैसा कि $q-m_k+q_k$ विषम या सम हो ,

(2.5) तथा (2.10) के (2.1) में उपयोग से

$$f(s_1, \ldots, s_n) f_k(s_k) = F.s_k^{(1-D_k)/2} \Gamma(D_k s_k)\, a_k^{s_k}\, \pi_k^{-q+m_k-q_k}$$

$$\begin{cases}[\sin\{\frac{\pi}{2}(K_k-D_k s_k)\}]\{\lambda_k+0(e^{-c_k|t_k|})\} \\ [\cos\{\frac{\pi}{2}(K_k-D_k s_k)\}]\{\mu_k+0(e^{-c_k|t_n|})\}\end{cases}$$

चूंकि

$$\pi^{-q+m_k-q_k}\{\lambda_k\ (\text{या}\ \mu_k)\ +0\ (e^{-c_k|t_k|})\}$$

का F में एकीकरण हो सकता है, इसलिये

$$f(s_1, \ldots, s_n) f'_k(s_k) a_k^{-s_k} = F.s_k^{(1-D_k)/2}$$

$$\Gamma(D_k s_k) \frac{\sin}{\cos} \frac{\pi}{2} (K_k - D_k s_k) \tag{2.11}$$

जबकि दाये पक्ष को sin अथवा cos पढ़ा जाता है जैसा कि $q+-q_k m_k$ विषम या सम हो। परिणाम (2.11) से हम आगे के खंड का प्रमेय सिद्ध करेंगे ।

3. $A(x_1, \ldots, x_n)$ का उपगानी प्रसार

फलन $A(x_1, \ldots, x_n)$ का वृहत तथा वास्तविक धनात्मक $x_1, \ldots, x_n$ तथा दिये हुये $\delta_1, \ldots, \delta_n$ के लिये यदि पद $0(x_1^{-\delta_n}, \ldots, x_n^{-\delta_n})$, नीचे (3.1) द्वारा दिया जाता है ।

प्रमेय

यदि फलन $A(x_1, \ldots, x_n)$ इस प्रकार का हो कि प्रत्येक $k=1, \ldots, n$ के लिये

(i) $$\sum_{j=1}^{p}(a_j-\tfrac{1}{2})-\sum_{j=1}^{q}(b_j-\tfrac{1}{2})+\sum_{j=1}^{m_k}(c_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})-\sum_{j=1}^{n_k}(d_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})$$

$$+\sum_{j=1}^{p_k}(e_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})-\sum_{j=1}^{q_k}(f_j^{(k)}-\tfrac{1}{2})=0,$$

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j^{(k)}=0=\sum_{j=1}^{q}\beta_j^{(k)},\ \sum_{j=1}^{m_k}I(\gamma_j^{(k)})=\sum_{j=1}^{q_k}I(\phi_j^{(k)}),$$

$$\tfrac{1}{2}K_k=\sum_{j=1}^{q}b_j-\sum_{j=1}^{m_k}c_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{q_k}f_j^{(k)},\ \sum_{j=1}^{n_k}I(\delta_j^{(k)})=\sum_{j=1}^{p_k}I(\theta_j^{(k)}),$$

$$R\left(-\sum_{j=1}^{m_k}\gamma_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{q_k}\phi_j^{(k)}\right)=\frac{D_k}{2}=R\left(\sum_{j=1}^{n_k}\delta_j^{(k)}-\sum_{j=1}^{p_k}\theta_j^{(k)}\right)>0,$$

$$\alpha_k=D_k^{-D_k}\prod_{j=1}^{p}\alpha_j^{(k)\,-\alpha_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{q}\beta_j^{(k)\,\beta_j^{(k)}}\sum_{j=1}^{m_k}\gamma_j^{(k)\,-\gamma_j^{(k)}}$$

$$\prod_{j=1}^{n_k}\delta_j^{(k)\,\delta_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{p_k}\theta_j^{(k)\,-\theta_j^{(k)}}\prod_{j=1}^{q_k}\phi_j^{(k)\,\phi_j^{(k)}},$$

(ii) $$\min_{1\leqslant j\leqslant m_k} R\left(\frac{c_j^{(k)}+u_k}{\gamma_j^{(k)}}\right)>\tfrac{1}{2},\ \gamma_j^{(k)}\neq 0;\ n_k=0,1,2,\ldots;$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n_k} R\left(\frac{1-d_j^{(k)}+v_k}{\delta_j^{(k)}}\right)>1,\ \delta_j^{(k)}\neq 0;\ u_k=0,1,2,\ldots,$$

(iii) x_k वास्तविक तथा धनात्मक है और

$$R(\beta_1^{(k)},\ldots,\beta_q^{(k)},\gamma_1^{(k)},\ldots,\gamma_{m_k}^{(k)},\phi_1^{(k)},\ldots,\phi_{q_k}^{(k)})>0.$$

(iv) दिये हुये

$$\delta_k > \max R\left(\frac{c_1^{(k)}}{\gamma_1^{(k)}}, \ldots, \frac{c_{m_k}^{(k)}}{\gamma_{m_k}^{(k)}}\right),$$

जबकि r_k $D_k - \left(\delta_k - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}$ में महत्तम पूर्णांक है तथा u_{hk} $(\forall h_k = 1, \ldots, m_k)$

$$\{\delta_k |\gamma_{h_k}^{(k)}|^2 - R(c_{h_k}^{(k)}) R(\gamma_{h_k}^{(k)}) - I(c_{h_k}^{(k)}) I(\gamma_{h_k}^{(k)})\}/R(\gamma_{h_k}^{(k)})$$

से छोटा महत्तम अनृणात्मक पूर्णांक व्यक्त करता हो तो

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=0}^{r_k} \frac{v_i^{(k)}}{D_k} \left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{z_k/D_k} \right.$$

$$\left. \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left\{\frac{\pi}{2}(K_k + z_k) - \left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{1/D_k}\right\}\right]$$

$$+ \prod_{k=1}^{n} \left[\sum_{h_k=1}^{m_k} \sum_{\mu_k=0}^{u_{hk}} \frac{(-)^{\mu_k} x_k^{-w_k}}{\gamma_{h_k}^{(k)} \mu_k!} \phi_k(w_k) \right]$$

$$\cdot f(w_1, \ldots, w_n) + 0(x_1^{-\delta_1} \ldots x_n^{-\delta_n}) \qquad (3.1)$$

जबकि (3.1) के दाएँ पक्ष में अथवा पढ़ा जाता है जैसा कि $q - m_k + q_k$ विषम या सम धनात्मक पूर्णांक है

$$z_k = (1 - D_k - 2i)/2, w_k = (c_{h_k}^{(k)} + \mu_k)/\gamma_{h_k}^{(k)},$$

$$\phi_k(w_k) = \frac{\prod_{j=1, j \neq h_k}^{m_k} \Gamma(c_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} w_k) \prod_{j=1}^{n_k} \Gamma[1 - d_j^{(k)} + \delta_j^{(k)}(w_k - 1)]}{\prod_{j=1}^{p_k} \Gamma[1 - e_j^{(k)} + \theta_j^{(k)}(w_k - 1))] \prod_{j=1}^{q_k} \Gamma(f_j^{(k)} - \phi_j^{(k)} w_k)}$$

तथा $v_0^{(k)}, v_1^{(k)}, \ldots, v_{r_k}^{(k)}$ सभी फलन के प्राचलों पर आश्रित अचर हैं।

यदि प्राचल $\alpha_j^{(k)}, \beta_j^{(k)}, \gamma_j^{(k)}, \delta_j^{(k)}, \theta_j^{(k)}, \phi_j^{(k)}$ वास्तविक तथा धनात्मक लिये जाँय तथा $a_j, b_j, c_j^{(k)}, d_j^{(k)}, e_j^{(k)}, f_j^{(k)}$ में से प्रत्येक को एक में से घटाकर प्रतिस्थापित किया जाय तो (3.1) श्रीवास्तव तथा पंडा[3] के n चरों वाले H-फलन के विशिष्ट दशा में उपगामी प्रसार को देगा। और भी, यदि प्रत्येक ग्रीक अक्षर को एक मान लिया जाय तब खाडिया तथा गोयल[4] के n चरों वाले G-फलन की विशेष स्थिति में उपगामी प्रसार प्राप्त किया जा सकता है। इन n चरों वाले दोनों G-तथा H-फलनों द्वारा अबतक ज्ञात एक या दो चरों वाले दूसरे विशिष्ट फलन प्रतिपादित किये जा सकते हैं।

उपपत्ति :

(2.11) तथा फाक्स[2] के विवेचन से (3.1) को स्थापित करने के लिये निम्नलिखित समाकल के मान निकालने की आवश्यकता पड़ेगी

$$I=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\cdots\int_{L_n}\left\{f(s_1,\ldots,s_n)\prod_{k=1}^{n}[f_k(s_k)\,\alpha_k^{-s_k}]\right.$$

$$\left.-\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin}{\cos}[\pi/2\,(K_k-D_k s_k)]\sum_{i=0}^{r}\nu_j^{(k)}\,\Gamma\left(D_k s_k-i+\frac{1-D_k}{2}\right)\right\}$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{x_k}{\alpha_k}\right)^{-s_k}ds_k\right\} \tag{3.2}$$

जबकि L_k s_k-समतल में सरल रेखा तथा $\sigma_k=\delta_k$ व्यक्त करता है और इस प्रकार का है कि

$$\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma\,(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)}s_k)$$

का कम से कम एक पोल इसकी बाँयी ओर पड़ता है। यह संभव है यदि δ_k, $\nu=0$ के लिये $\{(c_j^{(k)}+\nu)/\gamma_j^{(k)} : j=1,\ldots,m_k\}$ के पोलों के वास्तविक भागों के महत्तम से भी बड़ा हो जो कि प्रकथन के प्रतिबन्ध (iv) में सम्मिलित है। और भी, I $x_1^{-\delta_1}\ldots x_n^{-\delta_n}$ की कोटि है। I का मान निकालने के लिये L_k।

वर्ग I में

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}f(s_1,\ldots,s_n)\prod_{k=1}^{n}\{f_k(s_k)\,x_k^{-s_k}\} \tag{3.3}$$

के वे सारे अवशेष आते हैं जो

$$\prod_{j=1}^{n_k} \Gamma\left[1-d_j^{(k)}+\delta_j^{(k)}(s_k-1)\right];\ \forall k=1, \ldots, n.$$

के अनंतकों से प्राप्त होते हैं। ये सारे पोल L_k के बायीं ओर होते हैं। प्राकथन का प्रतिबन्ध (ii) यह सुनिश्चित करता है कि ये सारे पोल $\sigma_k=0$ के बायीं ओर हैं इसलिये $\sigma_k=0$ अवश्य ही L_k के भी बायीं ओर हैं। स्पष्टतः ये अवशेष वही हैं जो समाकल (1.1) जो $A(x_1, \ldots, x_n)$ को परिभाषित करता है। अतः इस वर्ग के अवशेषों का योग $A(x_1, \ldots, x_n)$ है।

वर्ग II में वे सारे अवशेष हैं जो व्यंजक (3.3) से प्राप्त होते हैं जो

$$\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma\left(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)} s_k\right)$$

के L_k के बाँयी ओर के पोलों से प्राप्त होता है। प्रतिबन्ध (ii) के अनुसार पोल $\sigma_k=\frac{1}{2}$, के दायीं ओर पड़ते हैं ताकि इस वर्ग के सारे पोल रेखाओं $\sigma_k=\frac{1}{2}$ तथा L_k के बीच में पड़ते हैं।

$$\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma\left(c_j^{(k)}-\gamma_j^{(k)} s_k\right)$$

के सभी पोल निम्नलिखित हैं

$$\left\{\frac{c_{h_k}^{(k)}+\mu_k}{\gamma_{h_k}^{(k)}} : \mu_k=0, 1, 2, \ldots\right\}\ \forall\ h_k=1, m_k \tag{3.4}$$

माना $\mu_k=0, 1, 2, \ldots, u_{hk}$ के लिये (3.4) के पोल L_k, u_{hk} के बायीं ओर पड़ते हैं अर्थात् इस प्रकार का महत्तम अऋणात्मक है पूर्णांक कि

$$R\left(\frac{c_{h_k}^{(k)}+u_{h_k}}{\gamma_{h_k}^{(k)}}\right)<\delta_k<R\left(\frac{c_{h_k}^{(k)}+u_{h_k}+1}{\gamma_{h_k}^{(k)}}\right) \tag{3.5}$$

यदि $c_{h_k}^{(k)}=a+ib$ तथा $\gamma_{h_k}^{(k)}=c+id$ तब (3.5) से,

$$R\left(\frac{a+ib+u_{h_k}}{c+id} \cdot \frac{c-id}{c-id}\right)<\delta_k$$

अथवा
$$\frac{ac+cu h_k+bd}{|\gamma_{h_k}^{(k)}|^2}<\delta_k$$

अथवा
$$u_{h_k}<\{\delta_k\,|\gamma_{h_k}^{(k)}|^2-ac-bd\}/c,$$

जो कि प्रतिबन्ध (iv) में समाविष्ट है। इस प्रकार इस वर्ग के पोल वही हैं जो $\mu_k=0, 1, 2, \ldots, u_{h_k}$ के लिये ($\forall\ h_k=1, \ldots, m_k$) (3.4) द्वारा दिये जाते हैं। अतः संगत अवशेष निम्नलिखित हैं

$$-\frac{1}{(2\pi i)^n}\prod_{k=1}^{n}\left\{\sum_{h_k=1}^{m_k}\ \sum_{\mu_k=0}^{u_{h_k}}\frac{(-)^{\mu_k}\,x_k^{-w_k}}{\gamma_{h_k}^{(k)}\,\mu_k\,!}\,\phi_k\,(w_k)\right\}f\,(w_1, \ldots, w_n).$$

वर्ग III में

$$-\frac{1}{(2\pi i)^2}\prod_{k=1}^{n}\left\{\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\ [\pi/2\,(K_k-D_k s_k)]\left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{-s_k}\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{j=1}^{r_k} v_j^{(k)}\ \Gamma\left(D_k s_k-1+\frac{1-D_k}{2}\right)\right\} \tag{3.6}$$

के वे सभी अवशेष आते हैं जो इस व्यंजक के L_k के बायीं ओर के पोलों से प्राप्त होते हैं। फाक्स[2] ने दिखाया है कि यदि (3.6) के अनंतक L_k के दायीं ओर भी हों तो भी (3.6) को उसी प्रकार व्यवहृत किया जा सकता है मानों इसके सभी पोलों L_k के बायीं ओर हों। इस प्रकार (3.6) के अनंतकों पर अवशेष

$$=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{v_k=0}^{\infty}\ \sum_{r=0}^{r_k}\frac{v_i^{(k)}\,(-)^{v_k}}{D_k\,v!}\left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{(z_k+v_k)/D_k}\right.$$

$$\left.\cdot\ \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\frac{\pi}{2}\,(K_k+z_k+v_k)\right\}\right],$$

अथवा

$$=-\frac{1}{(2\pi i)^n}\prod_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=0}^{r_k}\frac{v_i^{(k)}}{D_k}\left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{z_k/D_k}\sum_{v_k=0}^{\infty}\left\{-\left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{1/D_k}\right\}^{v_k}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{v_k\,!}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\frac{\pi}{2}\,(K_k+z_k+v_k)\right\}\right]$$

अथवा

$$= -\frac{1}{(2\pi i)^n} \prod_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=0}^{rk} \frac{v_i^{(k)}}{D_k} \left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{z_k/D_k} \right.$$

$$\left. \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \left\{ \frac{\pi}{2}(K_k+z_k) - \left(\frac{x_k}{a_k}\right)^{1/D_k} \right\} \right]$$

है जिसे प्राप्त करने में निम्नांकित साधारण त्रिकोणमितीय परिणाम का उपयोग किया है।

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\alpha + r\beta) = e^{x \cos\beta} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\alpha + x \sin\beta)$$

कोशी के प्रमेय के अनुसार इन तीनों वर्गों के अवशेषों का योग I के बराबर है जो स्वयं $x_1^{-\delta_1} . x_2^{-\delta_2} \dots x_n^{-\delta_n}$ की कोटि है। इस प्रकार परिणाम (3·1) स्थापित हो जाता है।

निर्देश

1. ह्विटेकर, ई० टी० तथा वाट्सन, जी० एन०, A Course of Modern Analysis, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस, 1927.
2. फाक्स, चार्ल्स, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.
3. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर०, J. Reine Angew. Math. 1976, **283-284**, 265-274.
4. खाडिया, एस० एस० तथा गोयल, ए० एन०, **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका**, 1970, **13**, 191-201.

विषय-सूची

1.	जैकोबी बहुपद तथा काम्पे द फेरी फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले बहुचर H-फलन के कुछ समाकल	आर० के० सक्सेना तथा सुवीन अग्रवाल	113
2.	विलयन में मिश्रित लिगंड संकुलों के अध्ययन की वैद्युतकण संचलन विधि	आर० के० पी० सिंह तथा के० एल० यादव	129
3.	n चरों वाले H-फलन के घात श्रेणी प्रसार	आर०एन०पाण्डेय तथा एस०के० पाण्डेय	137
4.	पर्वतीय स्थानों की पोषणिक समस्याएँ	त्रिभुवन नाथ उपाध्याय तथा कदाम्बी श्रीधरन	151
5.	सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदों के लिये कतिपय समाकल सम्बन्ध	के० एम० प्रधान तथा एन० के० माहेश्वरी	163
6.	समाकल रूपान्तरों के विषय में	वाई० एस० कुमारस्वामी तथा एस० एन० माथुर	169
7.	फूरियर श्रेणी की (A, λ) संकलनीयता	कु० कल्पना तथा पी० डी० कैथल	177
8.	क्षारीय माध्यम में क्लोरैमीन-टी द्वारा डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के आक्सीकरण की गतिकी तथा क्रियाविधि	एम० बी० सिंह, ए० के० सामन्त तथा बी० सिंह	185
9.	क्षारीय क्लोरैमीन-टी द्वारा साइक्लो-हेप्टैनोन के आस्मियम (VIII) उत्प्रेरित आक्सीकरण की क्रियाविधि	एम० बी० सिंह, आदर्श कुमार, बी० बी० एल० सक्सेना तथा भरत सिंह	193
10.	H-फलन वाला समाकल-III	अरुण के० राठी	199
11.	जीवाणु द्वारा जल के प्रकाशअपघटनी विखण्डन पर खनिज विलयन का प्रभाव	के० बहादुर, एस० रंगनायकी तथा एस० जे० सिंह	203
12.	फूरिये श्रेणी की एकसमान मैट्रिक्स संकलनीयता	एल० एम० त्रिपाठी तथा एस० नारायण	211
13.	तीन चरों वाले फलन का गणन संख्या श्रेणी प्रसार	आर० एन० पाण्डेय, एस० के० पाण्डेय तथा राजेश पाण्डेय	217
14.	सल्फामेथिजोल-आयरन और निकेल संकुल	कुमारी शारदा गर्ग तथा एस० एस० गुप्ता	227
15.	संचार के विभिन्न साधन	काली शंकर	233
16.	Cu (II), Ni (II), Cd (II) तथा Mn (II) के साथ मैनिक क्षारक के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक	कमल के० चतुर्वेदी तथा कु० मनोरमा गोयल	245
17.	उपलब्धि से माँग अधिक होने पर परिवहन काल का न्यूनतमीकरण	पी० के० पाण्डेय तथा आर० एन० मुकर्जी	251

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

जैकोबी बहुपद तथा काम्पे द फेरी फलन को अन्तर्ग्रस्त करने वाले बहुचर H-फलन के कुछ समाकल

आर० के० सक्सेना तथा सुवीन अग्रवाल
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त— अप्रैल 14, 1984]

सारांश

इस शोधपत्र का उद्देश्य बहुचर H-फलन काम्पे द फेरी फलन तथा व्यापक कोणांक वाले जैकोबी बहुपद के गुणनफल से संयुक्त कुछ परिमित समाकलों का प्रवर्तन करना है।

सक्सेना[6] तथा हाल में ही गोयल एवं गर्ग[7] ने क्रमश: काम्पे द फेरी फलन तथा गाउस के हाइपरज्यामितीय फलन, बहुचर H-फलन तथा जैकोबी बहुपद को अन्तर्ग्रस्त करने वाले समाकलों को स्थापित किया है। हमारे समाकल इन समाकलों के व्यापकीकरण हैं।

Abstract

Certain integrals for multivariate H-function involving Jacobi polynomial nnd Kampe de Feriet function. *By* R. K. Saxena and Suveen Agrawal, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

The object of this paper is to introduce certain finite integrals associated with the product of multivariate H-function, Kampè de Fèriet function and Jacobi polynomials with general arguments.

R. K. Saxena[6] and rccently Goyal and Garg[7] have established integrals involving Kampè de Fèriet function and Gauss's hypergeometric function, multivariate H-function and Jacobi polynomial respectively. Our integrals are generalization of these integrals containing multivariate H-function, Jacobi polynomials and Kampè de Fèriet function.

1. विषय प्रवेश

श्रीवास्तव तथा पण्डा[1] ने पहिले ही कई संम्मिश्र चरों वाले H-फलन (अथवा बहुचर H-फलन) का प्रवर्तन तथा अध्ययन किया है। (सक्सेना[2] भी देखें) किन्तु गोयल[3] (p. 19, Eq. (1.1)) तथा

गर्ग[4] के दो चरों वाले H-फलन के संकेतन के समान हम निम्नांकित संकेतन का उपयोग करेंगे जो अधिक संक्षिप्त तथा स्वतः व्याख्यात्मक हैं ।

$$H[x_1, ..., x_r] = \mathbf{H}^{0, n : \{m_i, n_i\}}_{p, q : \{p_i, q_i\}} \left[\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j; \alpha_j', ..., \alpha_j^{(r)})_{1,p} : & (c_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)})_{1,p_i} \\ (b_j; \beta_j', ..., \beta_j^{(r)})_{1,q} : & (d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1,q_i} \end{matrix} \right]$$

$$= \mathbf{H}^{0, n : \{m_1, n_1; ...; m_r, n_r\}}_{p, q : \{p_1, q_1; ...; p_r, q_r\}} \left[\begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{matrix} \right|$$

$$\left. \begin{matrix} (a_j; a_j', ..., a_j^{(r)})_{1,p} : (c_j', \epsilon_j')_{1,p_1}; ...; (c_j^{(r)}, \epsilon_j^{(r)})_{1,p_r} \\ (b_j; \beta_j', ..., \beta_j^{(r)})_{1,q} : d_j', \delta_j')_{1,q_1}; ...; (d_j^{(r)}, \delta_j^{(r)})_{1,q_r} \end{matrix} \right] ,$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi w}\right)^r \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi(s_1, ..., s_r) \prod_{j=1}^{r} \{\theta_i(s_i)(x_i)^{s_i} ds_i\}, \tag{1.1}$$

$w = \gamma - 1,\ i = 1, ..., r.$

जहाँ
$$\phi(s_1, ... s_r) = \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)$$

$$\cdot \left[\prod_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{i=1}^{r} \beta_j^{(r)} s_i) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i) \right]^{-1} \tag{1.2}$$

$$\theta_i(s_i) = \prod_{j=1}^{m_i} \Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=1}^{n_i} \Gamma(1 - c_j^{(i)} + \epsilon_j^{(i)} s_i)$$

$$\cdot \left\{ \prod_{j=m_i+1}^{q_i} \Gamma(1 - d_j^{(i)} + \delta_j^{(i)} s_i) \prod_{j=n_i+1}^{p_i} \Gamma(c_j^{(i)} - \epsilon_j^{(i)} s_i) \right\}^{-1} \tag{1.3}$$

उपलिपि (i) में i डैशों की संख्या है, उदाहरणार्थ $b^{(1)} = b'$, $b^{(2)} = b''$ इत्यादि प्रतीक $(a_j; \alpha_j', ..., \alpha_j^{(r)})_{1,p}$ p-प्राचलों $(a_1; \alpha_1', ..., \alpha_1^{(r)}), ..., (a_p; \alpha_p', ..., \alpha_p^{(r)})$ तथा $(c_j, \epsilon_j)_{1,p}$ प्राचलों $(c_1, \epsilon_1), ..., (c_p, \epsilon_p)$ के संक्षिप्त रूप हैं ।

विस्तृत व्याख्या, प्राचलों पर लगे प्रतिबन्धों, बहुचर H-फलनों के उपगामी प्रसार के लिये पाठक, श्रीवास्तव तथा पंडा[1] के मूल शोधपत्र को देखें ।

दो चरो वाले काम्पे द फेरी फलन की परिभाषा तथा गुणों के लिये [2, p. 160] देखें।

3. परिमित समाकल

नीचे बहुचर H-फलन, जैकोबी बहुपद तथा काम्पे द फेरी फलनों को अन्तर्ग्रस्त करने वाले पाँच परिमित समाकलों (दो एकल तथा तीन बहु समाकल) का मान निकाला गया है।

(अ) **प्रथम समाकल**

$$\int_0^t (t-x)^\rho x^\sigma P_u^{\alpha,\beta}(1-zx) \,.\, F^{\beta',\alpha'}_{\gamma',\delta'}\left[\begin{matrix}(a_{\alpha'} : b_{\beta'}, b_{\beta'}; \\ (c_{\gamma'} : d_{\delta'}, d_{\delta'};\end{matrix} kx^n, lx^n\right]$$

$$.\, H[y_1 (t-x)^{k_1} x^{h_1}, \ldots, y_r (t-x)^{k_r} x^{h_r}]\, dx$$

$$= t^{\rho+\sigma+np+nq+1} \sum_{p,q=0}^{\infty} A_{p,q}\, k^p\, l^q \sum_{w=0}^{u} \Gamma(\alpha+u+1)\, (-u)_w$$

$$.\, (\alpha+\beta+u+1)_w \,.\, (1/2)zt^w \,.\, [u!\, w!\, \Gamma(\alpha+w+1)]^{-1}$$

$$.\, G_{\rho,\sigma,w,np,nq}[y_1 t^{h_1+k_1}, \ldots, y_r t^{h_r+k_r}] \tag{2.1}$$

जबकि $P_u^{\alpha,\beta}(x)$ भलीभाँति ज्ञात जैकोबी बहुपद है तथा

$$F^{\alpha',\beta'}_{\gamma',\delta'}\left[\begin{matrix}a_{\alpha'} : b_{\beta'}, b'_{\beta'} : \\ c_{\gamma'} : d_{\delta'}, d'_{\delta'};\end{matrix} x, y\right]$$

काम्पे द् फेरी फलन हैं तथा सुविधा के लिये

$$A_{p,q} = \frac{(a_1)_{p+q} \ldots (a_{\alpha'})_{p+q} (b_1)_p (b'_1)_q \ldots (b_{\beta'})_p (b'_{\beta'})_q}{(c_1)_{p+q} \ldots (c_{\gamma'})_{p+q} (d_1)_p (d'_1)_q \ldots (d_{\delta'})_p (d'_{\delta'})_q\, p!\, q!} \tag{2.2}$$

तथा

$$G_{\rho,\sigma,m,np,nq}[y_1, \ldots, y_r] = H^{0,\, n+2 : \{m_i, n_i\}}_{p+2,\, q+1 : \{p_i, q_i\}}\left[\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{matrix}\right|$$

$$(-\rho; k_1, \ldots, k_r), (-\sigma-np-nq-w; h, \ldots, a_r), (a_j; \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} :$$

$$(-1-\rho-\sigma-w, -np-nq; h_1+k_1, \ldots, h_r+k_r), (b_j; \alpha_j', \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} :$$

$$\left.\begin{matrix}\{(c_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)})_{1,p_i}\} \\ \{(d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1,q_i}\}\end{matrix}\right] \tag{2.3}$$

समाकल (2.1) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी होता है ।

(i) $Re\,(\sigma+h_i v_i+1)>0,\ Re\,(\rho+k_i\, v_i+1)>0$

$$(i=1, \ldots, r)$$

(ii) $h_i>0,\ k_i>0,\ U_i>0$ तथा $|\arg y_i| < 1/2 U_i \pi$

$$(i=1, \ldots, r)$$

जहाँ
$$U_i = -\sum_{j=n+1}^{p} a_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{n_i} \epsilon_j^{(i)} - \sum_{j=n_i+1}^{p_i} \epsilon_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m_i} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} \delta_j^{(i)}$$

$$(i=1, 2, \ldots, r)$$

तथा
$$v_i = \min_{1\leqslant j\leqslant m_i} [Re\,\{ d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)})],$$

$$w_i = \max_{1\leqslant j\leqslant n_i} [Re\,\{ (1-c_j^{(i)})/\epsilon_j^{(i)} \}]$$

$$(i=1, 2, \ldots, r).$$

द्वितीय समाकल

$$\int_0^t (t-x)^\rho\, x^\sigma\, (1-\tfrac{1}{2}zx)^\beta P_u^{\alpha,\beta}\,(1-zx)\,.\,F_{\gamma'\delta'}^{\beta'\alpha'}\left[\begin{matrix} a_{\alpha'} : b_{\beta'}, b'_{\beta'}; \\ c_{\gamma'} : d_{\delta'}, d'_{\delta'}; \end{matrix}\ kx^n, lx^n \right]$$

$$.\ H\,[y_1\,(t-x)^{k_1}x^{h_1}, \ldots, y_r\,(t-x)^{k_r}x^{h_r}]\,dx$$

$$= t^{\rho+\sigma+np+nq+1} \sum_{w,p,q=0}^{\infty} A_{p,q}\, k^p l^q\, (\alpha+w+1)_u\, (-\beta-u)_w$$

$$.\ (1/2zt)^w\,(u!\,w!)^{-1}\, G_{\rho,\sigma,w,np,nq}\,[y_1 t^{h_1+k_1}, \ldots, y_r t^{h_r+k_r}] \qquad (2.4)$$

बशर्ते समाकल (2.1) में वर्णित प्रतिबन्ध संतुष्ट होते हों तथा (2.4) के दायीं ओर आने वाली श्रेणी निरपेक्षत: अभिसारी हो ।

(आ) परिमित बहु समाकल

तृतीय समाकल

$$\int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_r} \prod_{i=1}^{r} [(t_i-x_i)^{\rho_i} x_i^{\sigma_i} P_{u_i}^{(\mu_i,\nu_i)} (1-z_i x_i)]$$

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ F_{\gamma_i', \delta_i'}^{\alpha_i', \beta_1'} \left[\begin{matrix} {}^a\alpha_i' : {}^b\beta_i', {}^b\beta_i' ; \\ \qquad kx_i^{n_i}, lx_i^{n_i} \\ {}^c\gamma_i' : {}^d\delta_i', {}^d\delta_i' ; \end{matrix} \right] \right\}$$

$$. H [y_1 (t_1-x_1)^{k_1} x_1^{h_1}, \ldots, y_r (t_r-x_r)^{k_r} x_r^{h_r}] \, dx_1 \ldots dx_r$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left\{ t_i^{\rho_i+\sigma_i+n_i p_i+n_i q_i+1} \sum_{N_i=0}^{u_i} \Gamma (u_i+u_i+1)(-u_i)_{Ni} \right.$$

$$. (\mu_i+\nu_i+u_i+1)_{Ni} (1/2 z_i t_i)^{Ni} [u_i! \, N! \, \Gamma(\mu_i+N_i+1)]^{-1}$$

$$. \sum_{p_i, q_i=0}^{\infty} A_{p_i q_i} k^{p_i} l^{q_i} K_{\rho_i, \sigma_i, N_i n_i p_i, n_i q_i}$$

$$\left. . [y_1 t_1^{h_1+k_1}, \ldots, y_r t_r^{h_r+k_r}] \right\}, \tag{2.5}$$

जहाँ $K_{\rho_i, \sigma_i, N_i p_i, n_i q_i} [y_1, \ldots, y_r]$

$$= \mathbf{H}_{p,\, q : \{p_i+2,\, q_i+1\}}^{0,\, n : \{m_i,\, n_i+2} \left[\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j' \ldots \alpha_j^{(r)})_{1,p} : \\ (bj, \beta_j' \ldots \beta_j^{(i)})_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} -(\rho_i, k_i), (-\sigma_i-n_i p_i-n_i q_i-N_i, h_i), (e_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)})_{1,p_i} \\ (d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1,q_i} ; (-1-\rho_i-\sigma_i-n_i p_i-n_i q_i-N_i, h_i+k_i) \end{matrix} \right] \tag{2.6}$$

तथा
$$A_{p_i q_i} = \prod_{i=1}^{r} \left\{ \frac{({}^a\alpha_i)_{p_i+q_i} ({}^b\beta_i')_{p_i} ({}^{b'}\beta_i')_{q_i}}{({}^c\gamma_i')_{p_i+q_i} ({}^d\delta_i')_{p_i} ({}^d\delta_i')_{q_i} \, p_i! \, q_t!} \right\} \tag{2.7}$$

जहाँ प्रतीक $(-\rho_i, k_i), (-\sigma_i-n_ip_i-n_iq_i-N_i, h_i), (c_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)})_{1,p_i}$ क्रमशः निम्नलिखित के लिये हैं

$$(-\rho_1, k_1), (-\sigma_1-n_1p_1-n_1q_1-N_1, h_1), (c_j', \epsilon_j')_{1,p_1};$$

$$\ldots (-\rho_r, k_r), (-\sigma_r-n_rp_r-n_rp_r-N_r, h_r), (c_j^{(r)}, \epsilon_j^{(r)})_{1,p_r}$$

इत्यादि।

समाकल (2.5) निम्नलिखित (पर्याप्त) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी हैं।

(i) $Re\,(\rho_i+k_iv_i+1)>0$ तथा $Re\,(\sigma_i+h_iv_i+1)>0\ (i=1 \ldots r)$

(ii) $h_i>0, k_i>0, U_i>0$ तथा $|\arg y_i|<1/2U_i\pi\ (i=1 \ldots r)$

जबकि U_i तथा v_i ऊपर समीकरण (2.3) से परिभाषित हैं।

चतुर्थ समाकल

$$\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_r}\prod_{i=1}^{r}[(t_i-x_i)^{\rho_i}x_i^{\sigma_i}(1-\tfrac{1}{2}z_ix_i)^{v_i}P_{u_i}^{\mu_i, v_i}(1-z_ix_i)$$

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{F\begin{bmatrix} \alpha_i', \beta_i' \\ \gamma_i', \delta_i' \end{bmatrix}\left[\begin{matrix} a\alpha_i' : b\beta_i', b'\beta_i'; \\ c\gamma_i' : d\delta_i', d'\delta_i'; \end{matrix}\ kx_i^{n_i}, lx_i^{n_i}\right]\right\}$$

$$.\ H[y_1(t_1-x_1)^{k_1}x_1^{h_1}, \ldots, y_r(t_r-x_r)^{k_r}x_r^{h_r}]\,dx_1\ldots dx_r$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\left\{t_i^{\rho_i+\sigma_i+n_ip_i+n_iq_i+1}\sum_{p_i,q_i,N_i=0}^{\infty}(\mu_iN_i+1)_{u_i}(-v_i-u_i)_{N_i}\right.$$

$$\left.\cdot\ (\tfrac{1}{2}z_it_i)^{N_i}\cdot(u_i!\,N_i!)^{-1}\cdot A_{p_iq_i}\,k^{p_i}l^{q_i}\right\}$$

$$\cdot\ K_{\rho_i, \sigma_i, N_i, n_ip_i, n_iq_i}[y_1t_1^{h_1+k_1}, \ldots, y_rt_r^{h_r+k_r}] \qquad (2.8)$$

बशर्ते (2.8) के दायीं ओर आने वाली श्रेणी निरपेक्षतः अभिसारी है तथा (2.5) में दिये हुये प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होते हैं।

पंचम चतुर्थ

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{i=1}^{r} [(1-x_i)^{v_i} x_i^{k_i} P_{u_i}^{\mu_i, v_i}(1-2x_i) P_{g_i}^{\rho_i, \sigma_i}(1-2x_i)]$$

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ F \begin{matrix} \alpha_i', \beta_i' \\ \\ \gamma_i', \delta_i' \end{matrix} \left[\begin{matrix} a\alpha_i' : b\beta_i', b'\beta_i' ; \\ & kx_i^{n_i}, \; lx_i^{n_i} \\ c\gamma_i' : d\delta_i', d'\delta_i' : \end{matrix} \right] \right\}$$

$$. \, H\,[y_1 x_1^{h_1}, \ldots, y_r x_r^{h_r}]\, dx_1 \ldots dx_r$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \sum_{p_i, q_i = 0}^{\infty} A_{p_i q_i}\, k^{p_i} l^{q_i} \sum_{i=1}^{g_i} \Gamma(v_i+u_i+1)\, \Gamma(\rho_i+g_i+1)(-g_i)_{N_i}$$

$$. \, \rho_i+\sigma_i+g_i+1)_{N_i} (-1)^{u_i} [u_i \,!\; g_i \,!\; N_i\, \Gamma(\rho_i+1+N_i)]^{-1}$$

$$. \, L_{k_i,\, v_i,\, N_i,\, n_i p_i,\, n_i q_i}\, [y_1 \ldots, y_r] \tag{2.9}$$

जबकि

$$L_{k_i,\, v_i,\, N_i,\, n_i p_i,\, n_i q_i}\, [y_1, \ldots, y_r]$$

$$= H^{0,\, n\, :\, \{m_i,\, n_i+2\}}_{p,\, q\, :\, \{p_i+2,\, q_i+2\}} \left[\begin{matrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (a_j ; \alpha_j', \ldots, \alpha_j^{(r)})_{1,p} : \\ \\ (b_j ; \beta_j', \ldots, \beta_j^{(r)})_{1,q} : \end{matrix} \right.$$

$$-k_i-n_i p_i-n_i q_i-N_i, h_i), (\mu_i-k_i-n_i p_i-n_i q_i-N_i, h_i),$$

$$(d_j^{(i)}, \delta_j^{(i)})_{1,q_i}, (-v_i-k_i-n_i p_i, n_i q_i-u_i-N_i-1, h_i),$$

$$\left. \begin{matrix} (c_j^{(i)}, \epsilon_j^{(i)})_{1,p_i} \\ (\mu_i-k_i-n_i p_i-n_i q_i+u_i-N_i, h_i) \end{matrix} \right] (i=1, \ldots, r) \tag{2.10}$$

बशर्ते

$$Re\,(k_i v_i+1)>0,\; Re\,(v_i)>-1,\; |\arg y_i| < \tfrac{1}{2} U_i \pi,\; U_i>0;$$

जबकि U_i तथा v_i उपर्युक्त (2.3) से परिभाषित है ।

सूत्र (2.1) तथा (2.4) का मूल्यांकन

समाकल (2.1) के निगमन के लिये पहले हम काम्पे द् फेरी फलन को एक तुल्य श्रेणी के रूप में तथा समाकल्य में आने वाले H-फलन को भी (1.1) की सहायता से मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के पदों में प्रकट करते हैं, समाकलन के क्रम को परिवर्तित करते हैं जो कि श्रेणी के समाकलन क्षेत्र में एक समानतः अभिसारी होने के कारण वैध है, इसके बाद x-समाकल का मान निकाल कर ज्ञात परिणाम (5, p. 192, Eq. 46) का उपयोग करते हैं तथा परिणामस्वरूप प्राप्त कंटूर समाकल की (1.1) की सहायता से बहुचर H-फलन के पदों में व्याख्या करते हैं। इससे समाकल सूत्र तुरन्त प्राप्त हो जाते हैं।

द्वितीय समाकल (2.4) को भी उपर्युक्त विधि से सिद्ध किया जा सकता है। यहाँ हम निर्देश (5, p. 195) के समीकरण (46) के बदले के समीकरण (48) का उपयोग करते हैं।

समाकल सूत्र (2.5), (2.8) तथा (2.9) को इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है।

समाकल सूत्र (2.5) के निगमन के लिये निम्नलिखित समाकल का उपयोग करेंगे

$$\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_r}\prod_{i=1}^{r}\left\{(t_i-x_i)^{\rho_i}x_i^{\sigma_i}P_{u_i}^{\mu_i,\nu_i}(1-z_i x_i)\,dx_i\right\}$$

$$=\prod_{i=1}^{r}\Big\{\Gamma(\sigma_i+1)\,\Gamma(\mu_i+u_i+1)\,\Gamma(\rho_i+1)^{\rho_i+\sigma_i+1}$$

$$.\,[u_i\,\Gamma(\mu_i+1)\,\Gamma(\rho_i+\sigma_i+2)]^{-1}\,.\,{}_3F_2-u_i,\,u_i+\mu_i+\nu_i+1,$$

$$\sigma_i+1;\,\mu_i+1,\,\rho_i+2;\,\tfrac{1}{2}z_i\,t_i)\Big\} \tag{2.11}$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant r}\;[Re\,(\rho_i,\,\sigma_i,\,\mu_i,\,\nu_i)]<-1$$

के लिये लागू होता है। उपर्युक्त सूत्र ज्ञात समाकल (5, p. 192, Eq. 46)) से तुरन्त मिल जाता है।

(2.5) को स्थापित करने के लिये हम पहले काम्पे द् फेरी फलन को इसके तुल्य श्रेणी के पदों में प्रकट करते हैं, फिर (2.5) के समाकल्य में आये हुये बहुचर H-फलन को (1.1) द्वारा प्रदत्त मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल से प्रतिस्थापित करते हैं तथा समाकलन तथा संकलन के क्रम को परिवर्तित करते हैं जो कि (2.5) में वर्णित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है। इसके बाद, (2.11) के उपयोग से सबसे भीतरी बहु समाकल का मान निकालते हैं तथा परिणामस्वरूप प्राप्त कंटूर समाकल की (1.1) की सहायता से H-फलन के रूप में व्याख्या करते हैं। अन्तिम परिणाम (2.5) तथा उपर्युक्त वर्णित अभिसरण के प्रतिबन्ध (1.6) द्वारा दिये गये उपगामी प्रसार से निगमित हो जायेंगे।

इसी भाँति, (2.11) के बदले सूत्र (5, p. 192, Eq. (38)) और (5, p. 288, Eq. 20)) के बहुल अनुरूप के उपयोग से हम चतुर्थ तथा पंचम समाकल को सरलतापूर्वक प्राप्त कर सकते हैं।

4. उपयोगी प्रमेयिकायें

इस खंड में हम दो रोचक तथा उपयोगी प्रमेयिकाओं को स्थापित करेंगे। ये प्रमेयिकायें इस अर्थ में उपयोगी है कि इनका उपयोग किसी कई सम्मिश्र चरों वाले स्वेच्छ विश्लेषिक फलन के लांबिक फलनों के पदों में (एक या कई) श्रेणी में प्रसार को प्राप्त करने में किया जा सकता है। प्रमेयिकाओं को प्राप्त करने के लिये निम्नलिखित भली-भाँति ज्ञात लांबिक गुणधर्म की आवश्यकता पड़ेगी।

लांबिक गुणधर्म

माना $\left\{\phi_u(x)\right\}_{u=0}^{\infty}$

अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित एक फलनों का अनुक्रम है जो भार फलन $w(x)>0$, $\forall x \in (a, b)$ के लंबकोणीय है। तब परिभाषानुसार आन्तर गुणनफल निम्नांकित द्वारा दिया जाता है।

$$(\phi_u, \phi_v)=\int_a^b w(x)\phi_v(x)\phi_u(x)=\lambda_u \delta_{uv}, \tag{3.1}$$

जबकि पहले के समान, δ_{uv} क्रानकर डेल्टा है तथा

$$\lambda_u=||\phi_u(x)||^2\neq 0,\ (u\geqslant 0) \tag{3.2}$$

प्रमेयिकाओं को अभिव्यक्त करेंगे।

प्रमेयिका I

माना घातांक

$$\rho, \sigma, k_i, h_i, n_i\ (i=1, \ldots\, r)$$

इस प्रकार लिये गये हैं कि फलन

$$f(x)=(x-\xi)^{\sigma}(\rho-x)^{\rho} F[y_1(x-\xi)^{h_1}(\rho-x)^{k_1}, \ldots,$$
$$y_r(x-\xi)^{h_r}(\rho-x)^{k_r}] F_1[kx^n, lx^n) \tag{3.3}$$

संतत तथा परिबद्ध विचरण वाला है जबकि $\xi< x <\rho$.

तो $$f(x)=\sum_{u=0}^{\infty} f_u(y_1, \ldots, y_r)\,\phi_u(x),\ \xi<x<\rho.$$

जहाँ $f_u(y_1, \ldots, y_r)=(\lambda_u)^{-1}\int_{\xi}^{\rho} x-\xi)^{\sigma}(\rho-x)^{\rho} F[y_1(x-\xi)^{h_1}(\rho-x)^{k},$

$$\ldots, y_r(x-\xi)^{h_r}(\rho-x)^{k_r}]\, F_1[kx^n, lx^n]$$

$$.\, w(x)\,.\,\phi_u(x)\, dx, \, (u\geqslant 0) \tag{3.4}$$

तथा (3.4) में आया हुआ समाकल निरपेक्षतः अभिसारी है। और भी, प्रमेयिका 1 में, यदि $\xi=0$ तथा $\rho=\infty$ तब सभी ρ_i तथा $k_i\ (i=1, \ldots, r)$ शून्य होने चाहिये।

प्रमेयिका 2.

यदि

$$f(x, \ldots, x_r)=\prod_{i=1}^{r}\Big\{(x_i-\xi_i)^{\rho_i}(\rho_i-x_i)^{\sigma_i} F[y_i(x_1-\xi_1)^{h_1}(\rho_1-x_1)^{k_1},$$

$$\ldots, y_r(x_r-\xi_r)^{h_r}(\rho_r-x_r)^{k_r}]\ \prod_{i=1}^{r} F_1[kx_i^{n_i}\ lx_i^{n_i}]\Big\} \tag{3.5}$$

प्रमेयिका 1 के अनुरूप हम पाते हैं कि

$$f(x_1, \ldots, x_r)=\prod_{i=1}^{r}\Big\{\sum_{u_i=0}^{\infty}\phi_{u_i}(x_i)\, f_{u_1}, \ldots, u_r(y_1, \ldots, y_r)$$

$$\xi_i\leqslant x_i\leqslant\rho_i \tag{3.6}$$

जहाँ
$$f_{u_1, \ldots, u_r}(y_1, \ldots, y_r)=\prod_{i=1}^{r}\Big\{(\lambda_{u_i})^{-1}\int_{\xi_i}^{\rho_i}\ldots\int_{\xi_r}^{\rho_r} F[y_1(x_1-\xi_1)^{h_1}$$

$$.\,(\rho-x_1)^{k_1}, \ldots, y_r(x_r-\xi_r)^{h_r})\rho_r-x_r)^{k_r}]\, F_1[kx_i^{n_i}, lx_i^{n_i}]$$

$$.\prod_{i=1}^{r}\Big\{(x_i-\xi_i)^{\sigma_i}(\rho_i-x_i)^{\rho_i}\Big\}\, w_i(x_i)\,\phi_{u_i}(x_i)\, dx_i$$

$$u_i\geqslant 0, \cdot(i=1, \ldots, r) \tag{3.7}$$

बशते r-समाकल में प्रत्येक अस्तित्व में हो।

अवश्य ही, यदि $(\xi_i, \rho_i)\ (i=1, \ldots, r)$ अन्तरालों में प्रत्येक को $(0, \infty)$, से प्रतिस्थापित कर दिया जाये तो सभी $\rho_i, k_i, (i=1, \ldots, r)$ शून्य होने चाहिये।

5. प्रसार प्रमेय

जैसा पहले कहा जा चुका है उपरोक्त प्रमेयिकाओं का अनुप्रयोग कई सम्मिश्र चरों वाले स्वेच्छ फलन के एक या कई लांबिक फलनों के श्रेणी प्रसार किया जा सकता है। फलनों के लांबिक फलनों के महत्वपूर्ण उदाहरणों में बेसल फलन, हरमिट बहुपद, जैकोबी बहुपद, बेसल बहुपद, लागर बहुपद, त्रिकोणमितीय फलन इत्यादि हैं।

यहाँ हम उदाहरण के लिये अनुभाग 3 में वर्णित प्रमेयिकाओं तथा समाकलों की सहायता से तीन प्रसार प्रमेय प्राप्त करेंगे। वास्तव में ये प्रमेय विभिन्न शोधकर्ताओं द्वारा समय समय पर स्थापित एक अथवा कई चरों वाले विशिष्ट फलनों के इस प्रकार के प्रसार को एकीकृत तथा व्यापकीकृत करते हैं।

प्रमेय 1.

ऊपर परिभाषित U_i, v_i तथा w_i, के साथ माना

(i) $h_i, k_i, \rho, \sigma, n>0$ $(i=1, \ldots, r)$ $\min\{Re(\alpha), Re(\beta)\}>-1$

(ii) $U_i-k_i-h_i>0$, $|\arg y_i|<\frac{1}{2}(U_i-k_i-h_i)\pi$

(iii) प्रथम समाकल (2.1) के साथ दिये गये प्रतिबन्ध (i) सन्तुष्ट होते हैं।

तब

$$(1-x)^{\rho}x^{\sigma}H[y_1(1-x)^{k_1}x^{h_1}, \ldots, y_r(1-x)^{k_r}x^{h_r}]$$

$$.F^{\alpha', \beta'}_{\gamma', \delta'}\left[\begin{matrix} a_{\alpha'} : b_{\beta'}, b'_{\beta'}; \\ c_{\gamma'} : d_{\delta'}, d'_{\delta'}; \end{matrix} kx^n, lx^n\right]$$

$$= \sum_{p,q,u=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{u} (-u)_w(\alpha+\beta+2u+1)\,\Gamma(\alpha+\beta+u+w+1)$$

$$.[w!\,\Gamma(\alpha+w+1)\,\Gamma(\beta+u+1)]^{-1} . A_{p,q}\,k^p l^q$$

$$. G_{\rho+\beta,\, \sigma+\alpha,\, w,\, np,\, nq}[y_1, \ldots, y_r]\, P_u^{\alpha,\beta}(1-2x), \tag{4.1}$$

जबकि $u\geqslant 0$, $0<x<1$ तथा फलन

$$G_{\rho, \sigma, w, np, nq}[y_1, \ldots, y_r]$$

द्वारा परिभाषित है।

प्रमेय 2.

समीकरण (2.3) में परिभाषित U_i, v_i तथा w_i के साथ माना

(i) $h_i, k_i, \rho_i, \sigma_i, n_i > 0 \ (i=1, \ldots, r)$

तथा

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant r} \{Re\,(\mu_j),\ Re\,(v_j)\} > -1$$

(ii) $U_i > 0$, $|\arg y_i| < \frac{1}{2} U_i \pi \ (i=1, \ldots, r)$.

(iii) तृतीय समाकल में वर्णित प्रतिबन्ध (i) सन्तुष्ट होते हैं।

तब

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ (1-x_i)^{\rho_i} x_i^{\sigma_i} \right\} H\,[y_1(1-x_1)^{k_1} x_1^{h_1}, \ldots, y_r(1-x_r)^{k_r} x_r^{h_r}]$$

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ F \begin{matrix} \alpha_i', \beta_i' \\ \\ \gamma_i', \delta_i' \end{matrix} \left[\begin{matrix} {}^a\alpha_i' : {}^b\beta_i', b'_{\beta'}; \\ \qquad\qquad k x_i^{n_i}, l x_i^{n_i} \\ {}^c\gamma_i' : {}^d\delta_i', d'_{\delta'}; \end{matrix} \right] \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{p_i, q_i, u_i=0}^{\infty} \sum_{N_i=0}^{u_i} (-u_i)_{N_i} (\mu_i + v_i + 2u_i + 1)\,(\mu_i + v_i + u_i + N_i + 1) \right.$$

$$\left. .\,[\Gamma(\mu_i + N_i + 1)\,\Gamma(v_i + u_i + 1) N_i\,!]^{-1} A_{p_i q_i}\, k^{p_i} l^{q_i} P_{u_i}^{\mu_i, v_i}(1 - 2x_i) \right\}$$

$$.\ K_{\rho_i + v_i,\ \sigma_i + \mu_i,\ N_i,\ n_i p_i,\ n_i q_i} (y_1, \ldots, y_r)$$

जबकि $U_i \geqslant 0$, $0 < x_i < 1 \ (i=1, \ldots, r)$ तथा फलन

$$K_{\rho_i,\ \sigma_i,\ N_i,\ n_i p_i,\ n_i q_i} [y_1, \ldots, y_r]$$

(2.5) द्वारा दिये जाते हैं।

प्रमेय 3.

U_i, v_i तथा w_i । साथ ही माना

(i) $h_i, k_i, v_i > 0, \ (i=1, \ldots, r)$

तथा

$$\min_{1\leqslant j\leqslant r} \{Re) (\rho_i), Re (\sigma_i)\} > -1$$

(ii) $U_i>0$, $|\arg y_i|<\frac{1}{2}U_i \pi$ $(t=1, ..., r)$

(iii) पंचम समाकल में वर्णित प्रतिबन्ध (i) संतुष्ट होते हैं, तब

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ (1-x_i)^{\nu_i} x_i^{k_i} P_{u_i}^{(\mu_i, \nu_i)}(1-2x_i) \right\} H [y_1 x_1^{h_1}, ..., y_r x_r^{h_r}]$$

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ F \begin{matrix} \alpha_i', \beta_i' \\ \\ \gamma_i', \delta_i' \end{matrix} \left[\begin{matrix} a_{\alpha_i'} : b_{\beta_i'}, b'_{\beta_i'} ; \\ & kx_i^{n_i}, x_i^{n_i} \\ c_{\gamma_i'} : d_{\delta_i'}, d'_{\delta_i'} ; \end{matrix} \right] \right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left\{ \sum_{p_i, q_i, g_i=0} \sum_{N_i=0}^{g_i} \Gamma(\nu_i+u_i+1)(-g_i)_{N_i} \Gamma(\rho_i+\sigma_i+g_i+N_i+1) \right.$$

$$. (\rho_i+\sigma_i+2g_i+1)(-1)^{u_i} [U_i ! N_i ! \Gamma(\rho_i+N_i+1) \Gamma(\sigma_i+g_i+1)]^{-1}$$

$$. A_{p_i q_i} k^{p_i l_i} P_{g_i}^{\sigma_i \rho_i} (1-2x_i)$$

$$. L_{k_i+\rho_i, \nu_i+\sigma_i, N_i, n_i p_i, o_i q_i} [y_1, ..., y_r],$$

जबकि

$g_i \geqslant 0$, $0<x_i<1$ तथा फलन $L [y_1, ..., y_r]$, (2.8) द्वारा दिया जाता है।

प्रमेय 1 की उपपत्ति

यदि $\xi=0$, $\rho=1$ तथा माना कि प्रमेयिका 1 में

$$F [y_1, ..., y_r] = x^\sigma (1-x)^\rho H [y_1 (1-x)^{k_1} x^{h_1}, ..., y_r (1-x)^{k_r} x^{h_r}]$$

$$. F \begin{matrix} \alpha', \beta' \\ \gamma', \delta' \end{matrix} \left[\begin{matrix} a_{\alpha'} : b_{\beta'}, b'_{\beta'} ; \\ c_{\gamma'} : d_{\delta'}, d'_{\delta'} ; \end{matrix} kx^n, lx^n \right]$$

और भी,

परम्परागत जैकोबी बहुपद

$$\left\{ P_u^{(\alpha, \beta)} (1-2x) \right\}_{u=0}^{\infty}$$

को लांबिक फलन समुच्चय के रूप में लें।

जैकोबी बहुपद के बारे में यह भली-भाँति विदित है कि

$$w(x)=x^{\alpha}(1-x)^{\beta},\ \xi=0,\ \rho=1$$

तथा

$$\lambda_u=\Gamma(\alpha+u+1)\ \Gamma(\beta+u+1)\ [(\alpha+\beta+2u+1)\ \Gamma(\alpha+\beta++u+1)\ u\ !]^{-1}$$

$$\min\{Re\ (\alpha),\ Re\ (\beta)\}>-1,\ u\geqslant 0. \qquad (4.4)$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$x^{\sigma}\ (1-x)^{\rho}\ H\ [y_1 x^{h_1}\ (1-x)^{k_1},\ \ldots,\ y_r x^{h_r}\ (1-x)^{k_r}]$$

$$.\ F\begin{matrix}\alpha',\ \beta'\\ \\ \gamma',\ \delta'\end{matrix}\left[\begin{matrix}a_{\alpha'}\ ;\ b_{\beta'},\ b'_{\beta'}\ ;\\ \\ c_{\gamma'}\ :\ d_{\delta'},\ d'_{\delta'}\ ;\end{matrix}\ kx^n,\ lx^n\right]$$

$$=\sum_{u=0}^{\infty} f_u(y_1,\ \ldots,\ y_r)\ P_u^{\alpha,\beta}\ (1-2x),\ 0<x<1 \qquad (4.5)$$

जहाँ

$$f_u(y_1,\ \ldots,\ y_r)=(\lambda_u)^{-1}\int_0^1 x^{\sigma+\alpha}(1-x)^{\rho+\beta}\ H\ [y_1 x^{h_1}(1-x)^{k_1},\ \ldots,\ y_r x^{h_r} x^{h_r}(1-x)^{k_r}$$

$$.\ F\begin{matrix}\alpha',\ \beta'\\ \\ \gamma',\ \delta'\end{matrix}\left[\begin{matrix}a_{\alpha'}\ :\ b_{\beta'},\ b'_{\beta'}\ ;\\ \\ c_{\gamma'}\ :\ d_{\delta'},\ d'_{\delta'}\ ;\end{matrix}\ kx^n,\ lx^n\right]$$

$$.\ P_u^{\alpha,\ \beta}\ (1-2x)\ dx \qquad (4.6)$$

(2.1) ($t=1,\ z=2$) की सहायता से (4.6) का मान निकाल कर इस प्रकार प्राप्त $f_u(y_1,\ \ldots,\ y_r)$ तथा λ_u (का मान (4.4) से (4.6) में रखने पर हम आसानी (4.1) प्राप्त करते हैं।

प्रमेय 2 तथा 3 की उपपत्ति

प्रसार प्रमेय 2 तथा 3 को प्रमेय 1 की भाँति ही विकसित किया जा सकता है। इसमें अपवाद यह है कि यहाँ हम प्रमेयिका 1 तथा समाकल (2.1) के बदले प्रमेयिका 2 तथा समाकल सूत्रों (2.5) तथा (2.9) का उपयोग करते हैं।

निर्देश

1. रेनविले, ई० डी०, Special functions, मैकमिलन, न्यूर्याक, 1965.
2. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के०, The H-function with applications in Statistics and other Disciplines, जानविले एण्ड सन्स, न्यूयार्क 1978,
3. गोयल, एस० पी०, Pure and Applied Mathematika Science, 1978, **8**, 19-28.
4. गर्ग, आर० एस०, Pure and Applied Mathematika Science, 1979, **10**, 31-36.
5. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग 2, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1954.
6. सक्सेना, आर० के०, Estrallo dalla Rivista 'LARICERA', 1970, **2**, 23-27.
7. गोयल, एस० पी० तथा गर्ग, आर० एस०, Kyungook. Math. J. 1981, **21**, 123-134.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

विलयन में मिश्रित लिगैंड संकुलों के अध्ययन की वैद्युतकण संचलन विधि

आर० के० पी० सिंह तथा के० एल० यादव

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अगस्त 10, 1984]

सारांश

विलयन में मिश्रित लिगैंड संकुल तन्त्रों के लिये वैद्युतकण संचलन का उपयोग करने वाली एक नई विधि का वर्णन किया गया है। यह प्रविधि पी-एच 8.5 पर आधारी विद्युतअपघट्य के संकुलों को मिश्रित करके विद्युत क्षेत्र के अन्तर्गत धातु आयन धब्बे की गति पर आधारित है। इसमें प्राथमिक लिगैंड (NTA) की सान्द्रता स्थिर रखते हुये द्वितीयक लिगैंड ऐस्पार्टिक अम्ल की सान्द्रता परिवर्तित की गई। M (II)-ऐस्पार्टिक अम्ल तथा M (II)-NTA द्वयंगी साम्यावस्थाओं का भी अध्ययन किया गया। संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक ज्ञात किये गये।

Abstract

Ionophoretic technique in the study of mixed ligand complexes in solution. (M (II) NTA-Aspartic Acid Systems.) *By* R. K. P. Singh and K. L. Yadava, Chemistry Department, Allahabad University, Allahabad.

A new method involving the use of paper electrophoresis is described for the study of the equilibria in mixed-ligand complex system in solution. This technique is based on the movement of a spot of metal ion under an electric field with complexants added in the background electrolyte at pH 8.5. The concentration of primary ligand (NTA) was kept constant while that of secondary ligand aspartic acid was varied. The plots of log [aspartic acid] against mobility were used to obtain information on the formation of the mixed complex and to calculate its stability constants. The binary equilibria M(II)-aspartic acid and M(II)-NTA have also

been studied since it is prerequisite for the investigation of mixed complexes. The stability constants of the complexes, Metal-NTA-Aspartic acid have been found to be 5.43, 3.43, 3.22 for Cu (I), Zn (II) and Cd (II) complexes respectively at $\mu=0.1$ and temp. 35° C.

विलयन में धातु संकुलों के अध्ययन के लिये पत्र वैद्युतकण संचलन का प्रयोग किया गया है और संकुल प्रजातियों के स्थायित्व स्थिरांकों के निश्चयन के प्रयास किये गये ।[1,2] हाल ही में हमारी प्रयोगशाला में पदशः संकुल निर्माण के अध्ययन की एक नवीन विधि विकसित की गई[3-6] । यद्यपि एकाकी लिगैंड के साथ धातु संकर तंत्रों के अध्ययन के लिये पत्र वैद्युत कण संचलन का उपयोग किया गया है किन्तु मिश्रित संकुलों के लिये कोई सुव्यवस्थित अध्ययन नहीं हुआ । यद्यपि जाकिस-सुलिकोस्का[7] ने Mg (II) के मिश्रित हैलाइड संकुलों के निर्माण के विषय में कुछ प्रेक्षण किये हैं किन्तु इस प्रेक्षण के अत्यन्त गुणात्मक होने के कारण न तो प्रजातियों की प्रकृति के सम्बन्ध में, न ही उनके स्थायित्वों के सम्बन्ध में ही कोई प्रकाश पड़ता है । हमारी प्रयोगशाला के प्रकाशनों में मिश्रित संकुलों के अध्ययन की नवीन विधि का वर्णन मिलता है । [8-11] प्रस्तुत शोध कार्य हमारी प्रविधि के विस्तार स्वरूप है जिसमें Cu (II)/Zn (II)/Cd (II)-नाइट्रिलोट्राइऐसीटेट ऐस्पार्टेट मिश्रित तन्त्र से सम्बन्धित सूचना दी गई है ।

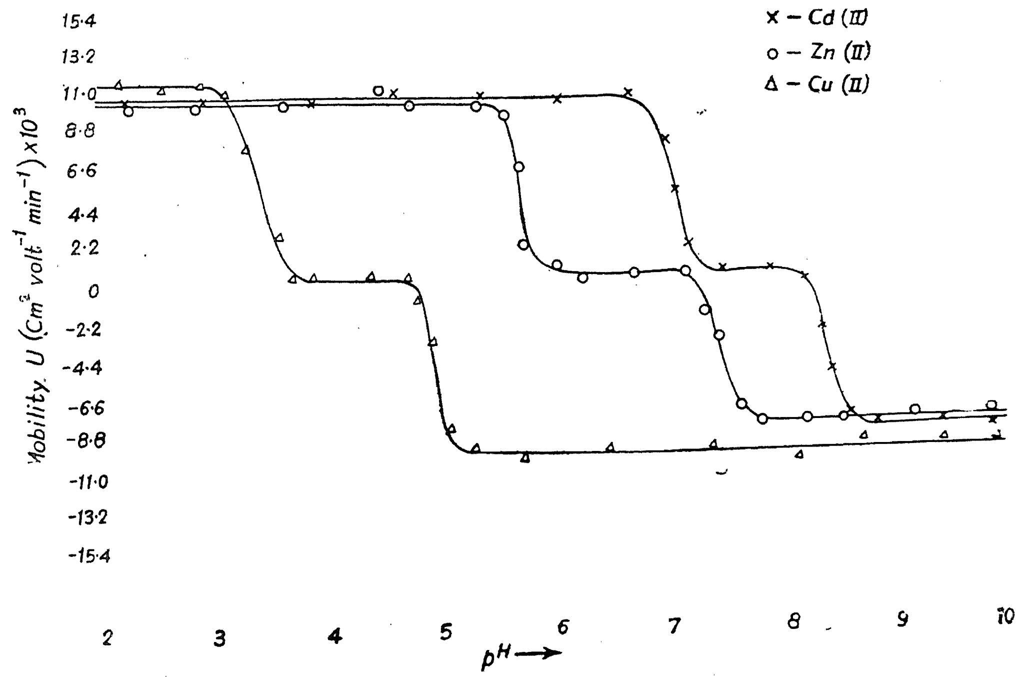
प्रयोगात्मक

उपकरण: पिछले प्रपत्र[14] में हमने उपकरण, आधारी विद्युत् अपघट्य तथा विधि का विस्तृत वर्णन किया है । वह उसी रूप में यहाँ भी लागू होता है । रसायनों में Cu (II), Zn (II) तथा Cd (II) के परक्लोरेटों की तैयारी की गई जिनके तैयार करने की विधि भी उसी प्रपत्र के अनुसार है ।

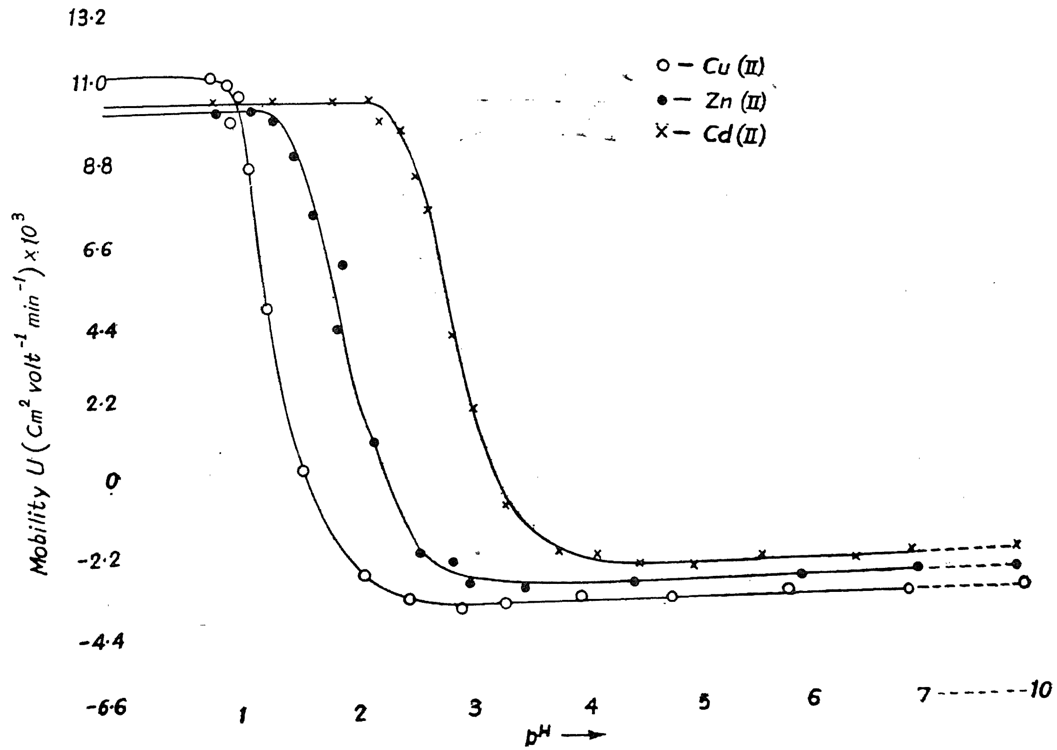
परिणाम तथा विवेचना

1. धातु-ऐस्पार्टिक अम्ल द्वयंगी तंत्र

धातु धब्बे की समग्र वैद्युतकण संचलन गतिशीलता को पी-एच के विपक्ष आलेखित करने पर चित्र 1 में प्रदर्शित वक्र प्राप्त होता है जिसमें अनेक पठार हैं । पठार उस पी-एच परास का सूचक है जिसमें गति स्थिर है । यह तभी सम्भव है जब कोई विशेष संकुल अत्यधिक मात्रा में बने । इस तरह प्रत्येक पठार किसी न किसी संकुल प्रजाति के निर्माण का सूचक है । पहला पठार उस क्षेत्र को बताता है जिसमें धातु आयन संकुलित नहीं होते । यह निम्न पी-एच क्षेत्र में रहता है जहाँ ऐस्पार्टिक अम्ल के अत्यधिक प्रोटानीकृत स्पीसीज़ की सान्द्रता उच्चतम होती है । इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि ऐस्पार्टिक अम्ल की यह प्रोटानीकृत प्रजाति संकुल नहीं बनाती । इसके आगे धातु के धब्बे की गति बढ़ती जाती है अतएव धातु आयन का संकुलन ऐस्पार्टिक अम्ल की ऐसी प्रजाति से होता होगा जिसकी सान्द्रता पी-एच में वृद्धि के साथ-साथ बढ़ती जाती है । चित्र 1 से पता चलता है कि द्वितीय पठार शून्य गतिशीलता के साथ 1 : 1 संकुल निर्माण का सूचक है जो उदासीन प्रकृति का होगा । पी-एच को आगे बढ़ाने पर तृतीय पठार बनता है जिसकी गतिशीलता ऋणात्मक है जिससे धातु संकुलों की

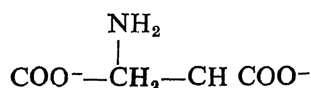


चित्र 1 : गतिशीलता वक्र



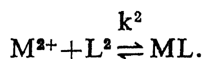
चित्र 2 : गतिशीलता वक्र

ऋणायनी प्रकृति सूचित होती है । यह तभी सम्भव है जब ऐस्पार्टिक अम्ल की दो ऋणायनी प्रजातियाँ अर्थात्

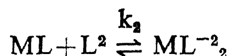


द्विसंयोजी धातु आयन से संयोग करे । आगे पी-एच बढ़ाने से धातु आयनों की गतिशीलता पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता ।

उपर्युक्त प्रेक्षण के आधार पर धातु आयन के साथ ऐस्पार्टिक अम्ल ऋणायन L^{-2} के संकुलन को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है



$$M^{2+} + L^2 \overset{k^2}{\rightleftharpoons} ML.$$



$$ML + L^2 \overset{k_2}{\rightleftharpoons} ML^{-2}_2$$

इस प्रकार पत्र पर धातु का धब्बा असंकुलित धातु आयनों 1 : 1 संकुल तथा 1 : 2 संकुल का संघट्ट होता है । विद्युत क्षेत्र में गति करने वाले धब्बे की समग्र गतिशीलता निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त की जाती है ।

$$U = \sum_n u_n f_n$$

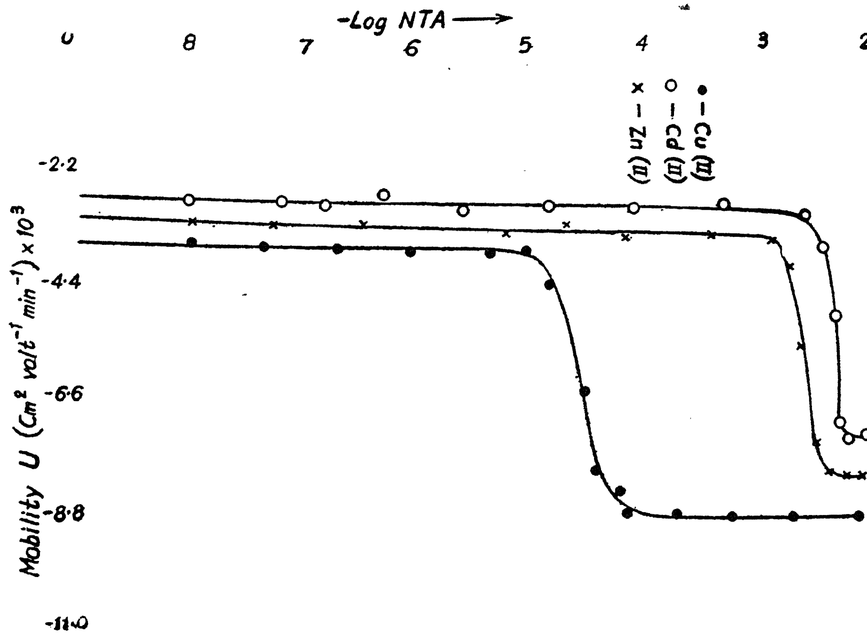
जहाँ U_n तथा f_n किसी विशिष्ट संकुल प्रजाति की गतिशीलता तथा मोल अंश हैं ।

यह समीकरण निम्नलिखित रूप धारण करता है यदि हम विभिन्न साम्यावस्थाओं पर विचार करें

$$U = \frac{u_0 + u_, k_. [L^{2-}] + u_2 k_1 k_2 [L^{2-}]^2}{1 + k_1 [L^{2-}] + k_1 k_2 [L^{-2}]^2}$$

जहाँ u_0, u_1 तथा u_2 क्रमशः असंकुलित आयन, 1 : 1 धातु संकुल तथा 1 : 2 धातु संकुल की गतिशीलतायें हैं ।

इस समीकरण का उपयोग धातु आयन के साथ ऐस्पार्टिक अम्ल के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांकों के परिगणन के लिये किया गया है । प्रथम स्थायित्व स्थिरांक k_1 की परिगणना के लिये प्रथम तथा द्वितीय पठारों के मध्य के क्षेत्र को लिया गया है । समग्र गतिशीलता U समतुल्य है $U_0 + U_1$ के, जहाँ U_0 असंकुलित धातु आयन की गतिशीलता है और U_1 प्रथम संकुल की उस पी-एच पर गतिशीलता है जहाँ $k_1 = 1/L$ । ऐस्पार्टिक अम्ल के वियोजन स्थिरांकों ($k_1 = 2.03$, $k_3 = 9.75$, $k_3 = 9.69$)[12] । की सहायता से ऐस्पार्टिक अम्ल के L^{2-} ऋणायन की सान्द्रता उस पी-एच पर ज्ञात की जाती है जिससे k_1 का मान परिगणित किया जा सकता है । दूसरे संकुल का स्थायित्व स्थिरांक k_2 गतिशीलता वक्र के द्वितीय तथा तृतीय पठारों के बीच के क्षेत्र से परिगणित किया जा सकता है । परिकलित मान सारणी 1 में दिये गये हैं ।



चित्र 3

सारणी 1

धातु आयन	ऐस्पार्टिक अम्ल	(परिगणित)		
	k_1	β_2	K_{NTA}	K'
Cu (II)	8.67	15.40	13.05	5.43
Zn (II)	5.90	10.10	10.55	3.43
Cd (II)	4.50	7.72	9.70	3.22

ऐस्पार्टिक अम्ल	(साहित्य)			
K_1	β_2	K_{NTA}	K'	निर्देश
8.57	15.35	12.94	5.33	12,13
5.84	10.15	10.66	3.27	12,13
4.39	7.55	9.78	3.24	12,13

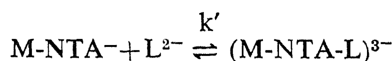
2. धातु-NTA-द्वियंगी तंत्र

चित्र 2 में विभिन्न पी-एच पर NTA की उपस्थिति धातु धब्बों की समग्र गतिशीलता सम्बन्धी प्रेक्षण दिये गये हैं। चित्र से प्रकट है कि चारों धातु आयनों से दो-दो पठार प्राप्त होते हैं किन्तु अन्तिम पठार की गतिशीलता ऋणात्मक क्षेत्र में है जिससे संकुलों की ऋणात्मक आविष्ट प्रकृति प्रदर्शित होती है अतः केवल एक NTA ऋणायन एक द्विसंयोजी आयन से संयोग करके 1 : 1 M-NTA संकुल प्रदान करता है जो अन्य कार्यकर्ताओं की खोज के अनुसार है।[13-15] सारणी 1 में NTA के संकुलों के के स्थायित्व स्थिरांक परिगणित करके दिये गये हैं।

3. M-NTA-ऐस्पार्टिक अम्ल त्र्यंगी तंत्र

इस तंत्र का अध्ययन जानबूझ कर पी-एच 8.5 पर किया गया। M-ऐस्पार्टिक अम्ल तथा M-NTA द्वयंगी तंत्रों के गतिशीलता वक्रों से देखा जाता है कि द्वयंगी तंत्र 8.5 से नीचे के पी-एच पर बनते हैं। अतः पार्श्व अन्योन्य क्रिया से बचने के लिये 8.5 से ऊपर के पी-एच पर M-NTA संकुल का M-NTA ऐस्पार्टिक अम्ल संकुल में रूपान्तर प्रयुक्त होगा।

चित्र 3 में गतिशीलता का आलेख डाले गये ऐस्पार्टिक अम्ल की सान्द्रता के लांगैरिथ्म के विपक्ष खींचा गया। प्रथम पठार के परास की गतिशीलता 1 : 1 M-NTA संकुलों की गतिशीलता के संगत है। द्वयंगी M-NTA तंत्र के अध्ययन से भी इसकी पुष्टि होती है। अन्तिम पठार की गतिशीलता प्रथम पठार की तुलना में अधिक ऋणात्मक है जिससे ऋण आवेशित संकुल निर्माण की सूचना मिलती है। चूंकि अन्तिम पठार की गतिशीलता हमारे प्रेक्षित 1 : 1 तथा 1 : 2 M-ऐस्पार्टिक अम्ल संकुल से मेल नहीं खाती अतएव यह निष्कर्ष निकलता है अन्तिम पठार की मॉयटी 1 : 1-M-NTA मायटी से ऐस्पार्टिक अम्ल के सवर्गीकरण के कारण है जिससे 1 : 1 : 1 मिश्रित संकुल (M-NTA-ऐस्पार्टिक अम्ल) बनता है जो इस प्रकार है



$$M\text{-}NTA^{-}+L^{2-} \overset{k'}{\rightleftharpoons} (M\text{-}NTA\text{-}L)^{3-}$$

प्रस्तुत वैद्युतकण संचलन अध्ययन में एक सरल संकुल मिश्रित संकुल में रूपान्तरित होता है अतएव समग्र गतिशीलता को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है

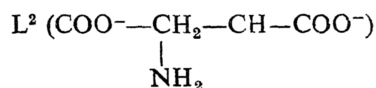
$$U = u_0 f_{m-NTA} + u_1 f_{n-NTA-L}$$

जहाँ u_0, u_1 तथा f_n-NAT, f_n-NAT-L क्रमशः गतिशीलतायें तथा M-NTA एवं M-NTA-L संकुलों के मोल अंश हैं। मोल अंशों के मान रखने पर समग्र गतिशीलता का समीकरण निम्नवत् होगा

$$U = \frac{u_0 + u_1 k' [L^{2-}]}{1 + k' [L^{2-}]}$$

जहाँ u_0 तथा u_1 वक्र के दो पठारों के क्षेत्र की गतिशीलतायें हैं।

चित्र 3 से ऐस्पार्टिक अम्ल की वह सान्द्रता ज्ञात हो जाती है जिस पर समग्र गतिशीलता ग' त-शीलताओं का माध्य होती है। ऐस्पार्टिक अम्ल



स्पीसीज का परिगणन पी-एच 8.5 पर किया जाता है। स्पष्ट है कि $k'=1/L$.

निर्देश

1. बियर्नाट, जे०, Rocz. Chem, 1964, **38**, 343 : C. A. 1964, **61**, 6456 b.
2. जोक्ल, वी०, J. Chromatogr., 1964, **14**, 71.
3. यादव, पी० सी०, घोष, ए० के०, यादव, के० एल० तथा डे, ए० के०, J. Chromatographia, 1976, **9**, 416.
4. सिंह, आर० के० पी०, सरकार, जे० के०, खेलावन, आर० तथा यादव, के० एल०, J. Chromatographia, 1980, **13**, 709.
5. सिंह, आर० के० पी०, सरकार, जे० के०, यादव, जे० आर०, यादव, पी० एल० तथा यादव' के० एल०, J. Electrochimica Acta., 1981, **26**, 395.
6. सिंह, आर० के० पी०, यादव, जे० आर०, यादव, पी० सी० तथा यादव, के० एल, J. Z. Phys.Chemie., 1983, **264**, 3, s. 464-468.
7. जाकिस-सुलिकोस्का, एम०, Zesz, Nauk, Politech. Lodz. Chem. 23; C. A.; 1965, 65; 1966, 1746.
8. यादव, पी० सी०, घोष, ए० के०, यादव, के० एल० तथा डे, ए० के०, J. Chromatographia 1976, **9**, 563.
9. सिंह, आर० के० पी० तथा यादव, के० एल०, Transactions of the SAEST, 1981, **16**, 163.
10. सिंह, आर० के० पी०, यादव, जी० आर० तथा यादव, के० एल०, J. Electrochem. Soc. India, 1981, **30**, 250.
11. सिंह, आर० के० पी०, खेलावन, जे० आर०, यादव, के० एल०, Nat. Aca. Sci. Letters, 1981, **4**.

12. मार्टेल, ए० ई० तथा स्मिथ, आर० एम०, Critical Stability Constants Amino Acids, 1974.

13. पेरिन, डी० डी०, Stability Constants of Metal Ion Complexes, PartB.Organic Ligands, 1979.

14. सिंह, एस०, यादव, एच० एल० तथा यादव, के० एल०, विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1984, **27** (2), 208-217.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

n चरों वाले H-फलन के घात श्रेणी प्रसार

आर० एन० पाण्डेय, तथा एस० के० पाण्डेय
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीट्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी-5

[प्राप्त—अक्टूबर 30, 1984]

सारांश

लेखकों ने कई चरों वाले परिवर्धित H-फलन के लिये घात श्रेणी प्रसार प्राप्त किया है जो प्राचलों को उपयुक्त मान प्रदान करने पर लारिसेला तथा अन्यों द्वारा प्रदत्त घात श्रेणी प्रसार प्रदान करता है।

Abstract

Power series expansions of *H*-function of *n*-variables, *By* R. N. Pandey, Rajesh Pandey and S. K. Pandey, Applied Mathematics Section, School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

The authors have obtained power series expansion for the modified H-function of several variables which by assigning suitable values of the parameters yields power series expansions given by Lauricella and others.

1. प्रस्तावना

लारिसेला ने[2] 1893 में n-चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलन की खोज की और उनके अभिसरण के प्रतिबन्ध प्राप्त किये। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य n-चरों वाले परिवर्धित H-फलन का घात श्रेणी प्रसार प्राप्त करना है जो प्राचलों के विशिष्टीकरण से n-चरों वाला लारिसेला का हाइपरज्यामितीय फलन प्रदान करता है।

2. परिभाषा तथा संकेतन

इस निबन्ध में सर्वत्र

$$a_{[i_1,\, i_2,\, \ldots,\, i_r]};\ (i_1 < i_2 < \ldots < i_r)$$

संक्षेपण का व्यवहार अनुक्रम

$$\{a_{l_1, l_2}\}, \{a_{l_1, l_2}\}, \{a_{l_1, l_2, l_3}\} \cdots \{a_{l_1, l_2, l_3, \ldots, l_r}\}\ l_r \in (1, 2, \ldots n).$$

के लिये किया जावेगा। यही नहीं, अनुक्रम

(i) $\{a_{l_1}\}$ से प्राचल $a_1, a_2, \ldots, a_n$, का सूचन होता है, तथा

(ii) $\{a_{l_1}, l_2\}$ से प्राचल

$$a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{1,n}; a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n}; \ldots; a_{n,2}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n}$$

का सूचन होता है और ऊपर वर्णित अन्य अनुक्रमों के लिये ऐसी ही विवेचना होगी।

निम्नलिखित उदाहरण उपर्युक्त संकेतनों के स्पष्टीकरण का कार्य करेगा

$$\prod_{j=1}^{M[i_1,i_2,i_3,i_4]} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant 4 \\ i_l \neq k,\ \forall l \in (1,2,3,4)}} \Gamma\,(a_j^{[i_1,i_2,i_3,i_4]} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} A_{j,k}^{[i_1,i_2,i_3,i_4]} s_k) = J_1 J_2 J_3 J_4,$$

जहाँ

$$J_1 = \prod_{j=1}^{M\{i_1\}} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < 4 \\ i_1 \neq k}} \Gamma\,(a_j^{\{i_1\}} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} A_{j,k}^{\{i_1\}} s_k)$$

$$= \prod_{j=1}^{M_1} \Gamma\,(a_j^{(1)} + A_{j,2}^{(1)} s_2 + A_{j,3}^{(1)} s_3 + A_{j,4}^{(1)} s_4)$$

$$\prod_{j=2}^{M_2} \Gamma\,(a_j^{(2)} + A_{j,1}^{(2)} s_1 + A_{j,3}^{(2)} s_3 + A_{j,4}^{(2)} s_4)$$

$$\prod_{j=1}^{M_3} \Gamma\,(a_j^{(3)} + A_{j,1}^{(3)} s_1 + A_{j,2}^{(3)} s_2 + A_{j,4}^{(3)} s_4)$$

$$\prod_{j=1}^{M_4} \Gamma\,(a_j^{(4)} + A_{j,1}^{(4)} s_1 + A_{j,2}^{(4)} s_2 + A_{j,3}^{(4)} s_3),$$

$$J_2 = \prod_{j=1}^{M\{i_1,i_2\}} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 4 \\ i_l = k,\ \forall l \in (1,2)}} \Gamma\,(a_j^{\{i_1,i_2\}} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} A_{j,k}^{\{i_1,i_2\}} s_k)$$

$$= \prod_{j=1}^{M_{(1,2)}} \Gamma \left(a_j^{(1,2)} + A_{j,3}^{(1,2)} s_3 + A_{j,4}^{(1,2)} s_4\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(1,3)}} \Gamma \left(a_j^{(1,3)} + A_{j,2}^{(1,3)} s_2 + A_{j,4}^{(1,3)} s_4\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(1,4)}} \Gamma \left(a_{j,2}^{(1,4)} s_2 + A_{j,4}^{(1,4)} s_3\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(2,3)}} \Gamma \left(a_j^{(2,3)} + A_{j,1}^{(2,3)} s_1 + A_{j,4}^{(2,3)} s_4\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(2,4)}} \Gamma \left(a_j^{(2,4)} + A_{j,1}^{(2,4)} s_1 + A_{j,3}^{(2,4)} s_3\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(3,4)}} \Gamma \left(a_j^{(3,4)} + A_{j,1}^{(3,4)} s_1 + A_{j,2}^{(3,4)} s_2\right),$$

$$J_3 = \prod_{j=1}^{M\{i_1,i_2,i_3\}} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant 4 \\ i_l \neq k,\ l \in (1,2,3)}} \Gamma \left(a_j^{\{i_1,i_2,i_3\}} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} A_{j,k}^{\{t_1,i_2,i_3\}} s_k\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{M_{(1,2,3)}} \Gamma \left(a_j^{(1,2,3)} + A_{j,4}^{(1,2,3)} s_4\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(1,2,4)}} \Gamma \left(a_j^{(1,2,4)} + A_{j,3}^{(1,2,4)} s_3\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(2,3,4)}} \Gamma \left(a_j^{(2,3,4)} + A_{j,1}^{(2,3,4)} s_1\right)$$

$$\prod_{j=1}^{M_{(1,3,4)}} \Gamma \left(a_j^{(1,3,4)} + A_{j,2}^{(1,3,4)} s_2\right)$$

$$J_4 = \prod_{j=1}^{M\{i_1,i_2,i_3,i_4\}} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqslant 4 \\ i_l \neq k,\ l \in (l,2,3,4)}} \Gamma \left(a_j^{\{i_1,i_2,i_3,i_4\}} \right.$$

$$\left. \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} A_{j,k}^{\{1,2,3,4\}} s_k\right)$$

एक रिक्त गुणनफल प्रदान करता है।

r के अन्य मानों के लिये भी ऐसी ही विवेचना दी जा सकती है।

हमने n चरों वाले H-फलन की परिभाषा करते हुये n चरों वाले तथा एकाकी चर वाले गामा फलनों के गुणनफल पर विचार किया। उपर्युक्त को ध्यान में रखते हुये $r=1$ तथा $r=n-1$ के लिये r के मानों को दिये गये संकेतनों के रूप में विचार नहीं किया जावेगा। इस तर्कों सहित हम n सम्मिश्र चरों वाले H-फलन की परिभाषा त्रिपाठी तथा पाण्डे[3] के पैटर्न पर निम्न प्रकार देते हैं

$$\mathbf{H}^{m,\,\mathbf{n}::\left\{(M^*,N^*)\right\}:\left\{(m_k,n_k)\right\}_{k=1}^{n}}_{p,\,q::\left\{(P^*,Q^*)\right\}:\left\{(p_k,q_k)\right\}_{k=1}^{n}}\left[\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}((a_p\,;\,(A_p^{(k)}))::\\ \\((b_q\,;\,(B_q^{(k)}))::\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(a_{P^*}\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2};\ A_{P^*}\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2})):((c_{p_k}^{(k)}\ ;\ C_{p_k}^{(k)}))\\((b_{Q^*}\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2};\ B_{Q^*}\left[i_1,i_2\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2})):((d_{q_k}^{(k)}\ ;\ D_{q_k}^{(k)}))\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{L_1}\int_{L_2}\cdots\int_{L_n}\left\{\phi(s_1,s_2,\ldots,s_n)\ \psi_r\left[s_{i_1},s_{i_1},\ldots,s_{i_r}\right]_{r=1}^{n-2}\right.$$

$$\left.\cdot\prod_{h=1}^{n}\phi_k(s_k)x^{(k)}\right\}ds_k,$$

जहाँ

$$\phi(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\sum_{k=1}^{n}A_j^{(k)}\cdot s_k)\ \prod_{j=1}^{\mathbf{n}}\Gamma(1-b_j-\sum_{k=1}^{n}B_j^{(k)}s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p}\Gamma(1-a_j-\sum_{k=1}^{n}A_j^{(k)}s_k)\ \prod_{j=\mathbf{n}+1}^{q}\Gamma(b_j+\sum_{j=1}^{n}B_j^{(k)}s_k)}$$

$$\psi_r\left[(s_{i_1},s_{i_2},\ldots,s_{i_r})\right]_{r=1}^{n-2}$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{M^*}\ \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,3\ldots r)}}\Gamma(a_j^{\left[i_1,i_2,\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant n}Aj,k^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}s_k)}{\prod_{j=1+M^*}^{P^*}\ \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,\ldots r)}}\Gamma(1-a_j^{\left|i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-1}}-\sum_{1\leqslant k\leqslant n}A_j^{\left[i_1,i_2\ldots r.i\right]_{r=1}^{n-2}}s_k)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{N^*} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_r \leqslant n \\ i_l \neq k_1 \forall l \in (1,2\ldots r)}} \Gamma\left(1 - b_j^{\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}} - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} B_j^{\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}} s_k\right)}{\prod_{j=N^*+1}^{Q^*} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \ldots < i_r \leqslant n \\ i_l \neq k, \forall l \in (1,2..r)}} \Gamma\left(b_j^{\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} B_{j,k}^{\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-1}} s_k\right)}$$

तथा

$$\phi_k(s_k) = \frac{\prod_{j=1}^{m_k} \Gamma(1 - c_j^{(k)} + C_j^{(k)} s_k) \prod_{j=1}^{n_k} \Gamma(d_j^{(k)} - D_j^{(k)} s_k)}{\prod_{j=m_{k+1}}^{p_k} \Gamma(c_j^{(k)} - C_j^{(k)} s_k) \prod_{j=n_{k+1}}^{q_k} \Gamma(1 - d_j^{(k)} + D_j^{(k)} s_k)}$$

जिसमें (i) M^* से

$$M_{\left[i_1, i_2, \ldots, i_r\right]_{r=1}^{n-2}}$$

तथा N^*, P^* एवं Q^* के लिये ऐसे ही निरूपण का द्योतक होता है।

(ii) $((c_{p_k}^{(k)}, C_{p_k}^{(k)}))$ संक्षिप्त रूप है $(c_{p_1}^{(1)}), C_{p_1}^{(1)}), \ldots, (c_{p_n}^{(n)}, C_{p_n}^{(n)})$ का

यदि $p_k = 0 \forall k \in (1, 2, \ldots, n)$ हो तो एरे रिक्त होगा। इसी प्रकार $((d_{q_k}^{(k)}, D_{q_k}^{(k)}))$ इत्यादि के लिए भी स्पष्टीकरण दिया जा सकता है

(iii) धन पूर्णांक $m, n, p, q, m_k, n_k, p_k, q_k, M^*, N^*$ तथा Q^* को असमिकाओं

$$0 \leqslant m \leqslant p;\ 0 \leqslant n \leqslant q;\ 0 \leqslant m_k \leqslant p_k$$
$$0 \leqslant n_k \leqslant q_k;\ 0 \leqslant M^* \leqslant P^*;\ 0 \leqslant N^* \leqslant Q^*.$$

द्वारा नयन्त्रित किया जाता है।

(iv) गुणांक $s_1, s_2, \ldots, s_n$ धनात्मक वास्तविक या सम्मिश्र संख्याएँ हैं। सरलता की दृष्टि से, हमने गुणांकों पर वास्तविक संख्याओं के रूप में ही विचार किया है। संकुल s_k-तल $\forall k \in (1, 2, 3, \ldots, n)$ में कंटूर L_k अपने दंतुरों सहित मेलिन-बार्नीज प्रकार का है जिससे आश्वस्त रहा जा सके कि वे पोलों के एक समुच्चय को दूसरे से पृथक करते हैं। दूसरे शब्दों में, कंटूर समाकल्य की किसी विचित्रता को काटते नहीं।

आगे यह मान लिया जवेगा कि कंटूर $-i\infty$ से $+i\infty$ तक होते हैं। इस कल्पना से न केवल विचित्रताओं से पिंड छुटाया जावेगा अपितु Γ-फलन की विभिन्न प्रकार की अनिवार्य विचित्रताओं के समुच्चयों को पृथक करना है क्योंकि यह मान लिया गया था कि समुच्चय काटेंगे नहीं। Γ-फलन शून्य

तथा ऋण पूर्ण संख्यक सरल पोलों के अतिरिक्त वैश्लेषिक है। उपगामी आचरण स्टलिर्गिं सूत्र द्वारा[1] दिया जाता है। लेकिन हम कंटूरों के चुनाव के कारण इस सूत्र का उपथोग उन रेखाओं के लिये करेंगे जो काल्पनिक अक्ष के समान्तर हैं चूंकि हम केवल घातांकी अभिसरण में रुचि रखते हैं अतः $\Gamma(w+i\xi)$ में $|\xi|$ तथा $|w|$ के विभिन्न घातों को संकेत E के अंतर्गत एक साथ रख दिया गया है जिससे

$$|\Gamma\,(w+i\xi)|\sim E\exp\left(\frac{\pi}{2}\,|\xi|\,\right),\ \text{ज्यों-ज्यों}\ |\xi|\rightarrow\infty,$$

जहाँ E कोई फलन है ξ का।

उपर्युक्त दृष्टि से, हमने ज्ञात किया कि (2.1) द्वारा परिभाषित H-फलन वैश्लेषिक फलन है जो निम्नलिखित सेक्टरों के अन्तर्गत है

$$|\arg\,(x_k)|\ <\tfrac{1}{2}\,\pi\,\mu_k, \tag{2.2}$$

जहाँ यह मान लिया गया है कि $x_k\neq 0\ \forall k\in(1, 2, 3, \ldots, n)$ तथा

$$0<\mu_k=\Big\{\sum_{j=1}^{m}A_j^{(k)}-\sum_{j=m+1}^{p}A_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{n}B_j^{(k)}-\sum_{j=n+1}^{q}B_j^{(k)}$$

$$+\sum_{j=1}^{M^*}\ \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall\ l\in(1,2,\ldots r)}} A_{j,k}\Big[i_1,i_2,\ldots,i_r\Big]_{r=1}^{n-2}$$

$$-\sum_{j=1+M^*}^{P^*}\ \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ l\in(1,2,\ldots r)}} A_{j,k}\Big[\,i,i_2,\ldots,i_r\,\Big]_{r=1}^{n-2}$$

$$+\sum_{j=1}^{N^*}\ \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,\ldots r)}} B_{j,k}\Big[\cdot i_1,i_2\ldots,i_r\,\Big]_{r=1}^{n-2}$$

$$-\sum_{j=1+N^*}^{Q^*}\ \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,3,\ldots r)}} B_{j,k}\Big[i_1,i_2,\ldots,i_r\Big]_{r=1}^{n-2}$$

$$+\sum_{j=1}^{m_k}C_j-\sum_{j=\ m_k+1}^{p_k}C_j+\sum_{j=1}^{n_k}D_j^{(k)}-\sum_{j=n_k+1}^{q_k}D_j^{(k)}\Big\}. \tag{2·3}$$

3. घातांक श्रेणी प्रसार

इस अनुभाग में n चरों वाले परिवर्धित H-फलन का घात श्रेणी प्रसार प्राप्त किया गया है जो n चरों वाले लारीसेला के हाइपरज्यामितीय फलनों को एकीकृत करता है ।[2]

जिस परिणाम को सिद्ध करना है वह निम्नवत् है :

प्रमेय

$1\leqslant i_1<i_2<i_3, \ldots, <i_r\leqslant n, \ \forall r \in (1, 2, \ldots, n\text{-}2)$ के लिये

$$H\begin{matrix} m, \mathbf{n}, : : \left\{(M^*, N^*)\right\} : \left\{(m_k, n_k+1)\right\}_{k=1}^{n} \\ p, q : : \left\{(P^*, Q^*)\right\} : \left\{(p_k, q_k+1)\right\}_{k=1}^{n} \end{matrix} \left\{\begin{matrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{matrix} \left| \begin{matrix} ((1-a_p; (A_p^k))) : : \\ ((1-b_q; (b_q^k))) : : \end{matrix} \right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix} ((1-a_{P^*}^{\left[i_1,i_2,\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}; A_{A^*}^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}})) : ((1-c_{p_k}^{(k)} ; C_{p_k}^{(k)})) \\ ((1-b_{Q^*}^{\left[i_1,i_2,\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}; B_{B^*}^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}})) : (01), (01), \ldots, (01); ((1-d_{q_k}^{(k)} ; D_{q_k}^{(k)})) \end{matrix}\right\}$$

$$=R_1 \sum_{I_1,I_2,\ldots,I_n=0}^{\infty} R_2 \cdot \frac{\prod_{j=1}^{p} [(1-a_j)]_{\Sigma A_j^{(k)} I_k}}{\prod_{j=1}^{q} [(1-b_j)]_{\sum_{k=1}^{n} B_j^{(k)} I_k}}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{P^*} \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n \\ i_l\neq k, \ \forall l \in (1,2,\ldots,r)}} [(1-a_j^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}})]_{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} I_k A_{j,k}^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-1}}}}{\prod_{j=1}^{Q^*} \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n \\ i_l\neq k, \ \forall l \in (1,2,\ldots,r)}} [(1-b_j^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}})]_{\sum_{1\leqslant k\leqslant n} I_k B_{j,k}^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}}}}$$

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{p_k} [(c_j^{(k)})]_{C_j^{(k)} I_k} \cdot x_1^{I_1} x_2^{I_2} \ldots x_n^{I_n}}{\prod_{j=1}^{n} \prod_{j=1}^{q_k} [(d_j^{(k)})]_{D_j^{(k)}} I_1! \, I_2! \ldots I_n!}, \tag{3.1}$$

जहाँ

$$R_1=\frac{\prod_{j=1}^{n}(b_j)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-a_j)\prod_{j=1}^{N^*}\prod_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n}\Gamma\left(b_j^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}}\right)}{\prod_{j=\mathbf{n}+1}^{q}\Gamma(1-b_j)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(a_j)\prod_{j=1+N^*}^{Q^*}\prod_{1\leqslant i_1,i_2\ldots i_r\leqslant n}\Gamma\left(1-b_j^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}}\right)}$$

$$\cdot\frac{\prod_{j=1}^{M^*}\prod_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n}\Gamma\left(1-a_j^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-1}}\right)}{\prod_{j=1+M^*}^{P^*}\prod_{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n}\Gamma\left(a_j^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-1}}\right)}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma(-d_j^{(k)})\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma(C_j^{(k)})}{\prod_{j=n_k+1}^{q_k}\Gamma(d_j^{(k)})\prod_{j=m_k+1}\Gamma(1-c_j)}\right], \tag{3.2}$$

$$K=\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{j=1}^{\mathbf{n}}I_k B_j^{(k)}-\sum_{j=m+1}^{p}I_k A_j^{(k)}+\sum_{j=1}^{n_k}I_k D_j^{(k)}-\sum_{j=m_k+1}^{p_k}I_k C_j^{(k)}\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{N^*}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,3,\ldots r)}}I_k B_{j,k}^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}}$$

$$-\sum_{j=1+M^*}^{P^*}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,3\ldots r)}}I_k A_{j,k}^{\left[i_1,i_2,\ldots,i_r\right]_{r=1}^{n-2}} \tag{3.3}$$

तथा $R_2=(--I)^K$

यहाँ वाम पक्ष का सदस्य एक वैश्लेषिक फलन है बशर्ते कि

$$|\arg(x_k)|<\frac{1}{2}\pi\lambda_k^*, \tag{3.4}$$

जहाँ $\lambda_k^*=\mu_k+1,\ \forall k\in(1.\ 2,\ \ldots.\ n).$

उपपत्ति

अब n चरों के H-फलन वाले निम्नलिखित समाकल पर विचार करें

$$M=\int_0^\infty\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty \prod_{k=1}^{n} x_k^{\lambda_k} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)$$

$$H\begin{matrix} m, n : : \left\{(M^*, N^*)\right\} : \left\{ (m_k, n_k) \right\}_{k=1}^{n} \\ p, q : : (P^*, Q^*) : \left\{(p_k, q_k)\right\}_{k=1}^{n} \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_p ; (A_p^{(k)})) : : ((a_{P^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2} A_{P^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2})) \\ ((b_p ; (B_p^{(k)})) : : ((b_{Q^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2} B_{Q^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2})) \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} : ((c_{p_k}^{(k)} ; C_{p_k}^{(k)})) \\ : ((d_{q_k}^{(k)} : D_{q_k}^{(k)})) \end{matrix}\right] . dx_1\, dx_2 \ldots dx_n. \qquad (3.5)$$

समाकल (3.5) का मान ज्ञात हो सकता है यदि हम सर्वप्रथम n चरों वाले H-फलन के स्थान पर इसका मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल रखें, समाकलन के क्रम को बदल दें, और सबसे भीतरी समाकल का मान निकालें तथा परिणामी मेलिन-बार्नीज समाकल को n चरों वाले H-फलन के रूप में विवेचना करें।

$$M=\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(a_k)\lambda_k+1}\right] H\begin{matrix} m, n : : \{(M^*, N^*)\} : (m_k+1, n_k) \\ p, q : : \{(P^*, Q^*)\} : (p_k+1, q_k) \end{matrix}$$

$$\left[\begin{matrix} 1/a_1 \\ 1/a_2 \\ \vdots \\ 1/a_n \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_p ; (A_p^{(k)})) : : ((a_{P^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}, A_{P^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2})) : (-\lambda_k; 1);\ ((c_{p_k}^{(k)}; C_{p_k}^{(k)})) \\ ((b_q : (B_q^{(k)})) : : ((b_{Q^*}\left[i_1, i_2 \ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}, B_{Q^*}\left[i_1, i_2 \ldots r\right]_{r=1}^{n-2})) : (d_{q_k}^{(k)}; D_{q_k}^{(k)}) \end{matrix}\right]$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(a_k)\lambda_k+1} H\begin{matrix} n, m : : \left\{(N^*, M^*)\right\} : \left\{(n_k, m_k+1)\right\}_{k=1}^{n} \\ q, p : : \left\{(Q^*, P^*)\right\} : \left\{(q_k, p_k+1)\right\}_{k=1}^{n} \end{matrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix}\right| \begin{matrix} ((1-b_q\,;(B_q^{(k)}))::((1-b_{Q^*}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}};B_{Q^*}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}})): \\ ((1-a_p\,;(A_p^{(k)}))::((1-a_{P^*}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}};A_{P^*}^{\left[i_1 i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}})): \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} ((1-d_{q_k}^{(k)};D_{q_k}^{(k)})) \\ (1+\lambda_k;1),((1-C_{p_k}^{(k)};C_{p_k}^{(k)})) \end{matrix}\right\},\ k\in(1,2.\ \ldots,n). \quad (3.6)$$

पुनश्च:, चूंकि (3.5) में आया H-फलन मेलिन-बार्नीज समाकल है, हम M को

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k\right)=\prod_{k=1}^{n}\sum_{I_k=0}^{\infty}\left\{\frac{(-\alpha_k x_k)\,I_k}{I_k!}\right\}.$$

का प्रयोग करते हुये अन्य रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

इस प्रकार हमें प्राप्त होता है

$$M=\sum_{I_1,I_2\ldots I_n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(a_j-\sum_{k=1}^{n}A_j^{(k)}(\lambda_k+1)-\sum_{k=1}^{n}I_k A_j^{(k)}\right)}{\sum_{j=m+1}^{p}\Gamma\left(1-a_j\ \sum_{k=1}^{n}A_j^{(k)}(\lambda_k+1)+\sum_{k=1}^{n}I_k A_j^{(k)}\right)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{\mathbf{n}}\Gamma\left(1-b_j+\sum_{k=1}^{n}B_j^{(k)}(\lambda_k+1)+\sum_{k=1}^{n}I_k B_j^{(k)}\right)}{\prod_{j=\mathbf{n}+1}^{q}\Gamma\left(b_j-\sum_{k=1}^{n}B_j^{(k)}(\lambda_k+1)-\sum_{k=1}^{n}I_k B_j^{(k)}\right)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{M^*}\ \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_v\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,3\ldots,r)}}\Gamma\left(a_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}-Aj,k^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}(\lambda_k+1)-\sum_{1\leqslant k\leqslant n}I_k A_{j,k}^{\left[i_1,i_2=i_r\right.}\right)}{\prod_{j=1+M^*}^{P^*}\ \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<t_r\leqslant n\\ i_l\neq k,\ \forall l\in(1,2,3,\ldots,r)}}\Gamma\left(1-a_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(\lambda_k+1)A_{j,k}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant n}I_\kappa A_{j,k}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r-1}^{n-2}}\right)}$$

$$\prod_{j=1}^{N^*} \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n \\ i_l\neq k,\ \forall\ l\in(1,2,\ldots r)}} \Gamma\left(1-b_j^{\left[i_1,i_r\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant n}(\lambda_k+1)B_{j,k}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant n} I_k\, B_{j,k}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}\right)$$

$$\overline{\prod_{j=1+N^*}^{Q^*} \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\ldots<i_r\leqslant n \\ i_l\neq k,\ \forall\ l\in(1,2,\ldots,r)}} \Gamma\left(b_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}-\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\Gamma(\lambda_k+1)\, B_{j,k}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}-\sum_{1\leqslant k\leqslant n} I_k\, B_{j,k}^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}\right)}$$

$$\prod_{j=1}^{n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma\left(1-c_j^{(k)}-(\lambda_k+1)\,C_j^{(k)}-I_k\,C_j^{(k)}\right)}{\prod_{j=m_k+1}^{p_k}\Gamma\left(c_j^{(k)}+C_j^{(k)}(\lambda_k+1)+I_k\,C_j^{(k)}\right)}\right\}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma\left(d_j^{(k)}+D_j^{(k)}(\lambda_k+1)+I_k\,D_j^{(k)}\right)(-\alpha_k)^{I_k}}{\prod_{j=n_k+1}^{q_k}\Gamma\left(1-d_j^{(k)}-D_j^{(k)}(\lambda_k+1)-D_j^{(k)}I_k\right).\ I_k!}\right\} \tag{3.7}$$

(p, m) को $(q, \mathbf{n})$ द्वारा तथा $(q, \mathbf{n})$ को (p, m) द्वारा a_j को b_j द्वारा प्रतिस्थापित करने तथा (3.6) एवं (3.7) में $\alpha_k=-x_k$ एवं $1+\lambda_k=0,\ \forall\ k\in(1, 2, 3, \ldots, n)$ रखने पर हमें वांछित फल प्राप्त होता है।

विशिष्ट दशायें

1: $(1-a_j)$ को a_j से; $(1-b_j)$ को b_j से; $\left(1-a_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}\right)$ को $a_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}$ से; $\left(1-b_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-2}}\right)$ को $b_j^{\left[i_1,i_2\ldots i_r\right]_{r=1}^{n-1}}$ से; $(1-c_{p_k}^{(k)}$ को $C_{p_k}^{(k)}$ से $(1-d_{q_k}^{(k)}$ को $(d_{q_k}^{(k)})$ से प्रतिस्थापित करने तथा Γ-फलनों में समस्त रोमन अक्षरों को 1 के बराबर रखकर तथा $q=0$; $m=p$; $n_k=0$; $m_k=p_k$,

$$P_{\left[i_1,i_2,..,i_r\right]_{r-1}^{n-2}}=\{0\},\ Q_{\left[i_1,i_2,..,i_r\right]_{r=1}^{n-2}}=\{0\}$$

का प्रयोग करने पर

$$R_2^* \mathbf{H}^{p,0::-:\{(p_k,1)\}_{k=1}^n}_{p,0::-:\{(p_k,q_k+1)\}_{k=1}^n} \left[\begin{matrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_p;1,1,\ldots,1))::-:((C_{p_k}^{(k)};1)) \\ -::-:((01),(01),\ldots,(01);(d_{q_k}^{(k)};1) \end{matrix} \right]$$

$$= \sum_{I_1,I_2,\ldots,I_n=0}^{\infty} \frac{\left[(a_p)\right]_{I_1+I_2\ldots+I_n} \left[(1-(c_{p_1}^{(1)})\right]_{I_1},\ldots,\left[(1-(c_{p_n}^{(n)}))\right]_{I_n}}{\left[(1-(d_{q_1}))\right]_{I_1}\ldots\left[(1-d)_{q_n}\right]_{I_n}} \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{x^{I_k}}{I_k!}\right], \tag{3.8}$$

जहाँ

$$R_2^* = \frac{\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma(1-d_j^{(k)})}{\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{p_k}\Gamma(1-c_j^{(k)})\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)},$$

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|<1.$$

यह दिखलाना कठिन नहीं है कि

(ii)
$$R_3^* \mathbf{H}^{0,q::-;\{(p_k,1)\}_{k=1}^n}_{0,q::-;\{(p_k,q_k+1)\}_{k=1}^n} \left[\begin{matrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -\quad::\quad-:((c_{p_k}^{(k)};1)) \\ ((b_q;1,1,\ldots,1))::-:(01),(01)\ldots(01);((d_{q_k}^{(k)};1)) \end{matrix} \right]$$

$$= \sum_{I_1,I_2,\ldots,I_n=0}^{\infty} \frac{\left[(1-(c_{p_1}^{(1)}))\right]_{I_1}\ldots\left[(1-(c_{p_n}^{(n)}))\right]_{I_n}}{\left[(1-(d_{q_1}^{(1)}))\right]_{I_1}\ldots\left[(1-(d_{q_n}^{(n)})\right]_{I_n}\left[(b_q)\right]_{I_1+I_2+\ldots+I_n}} \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k^{I_k}}{I_k!}\right)$$

जहाँ

$$R_3^* = \frac{\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{q_k} \Gamma(1-d_j^{(k)})}{\prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{p_k} \Gamma(1-c_j^{(k)}) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(1-b_j)},$$

$|x| < 1, |x_2| < 1, \ldots, |x_n| < 1,$

(iii) $$R_4^* \, H^{p,\,0\,::\,-\,:\,(p_k;\,1)}_{p,\,q\,::\,-\,:\,((p_k;\,q_k k+1))} \left[\begin{matrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} ((a_p;\,1,\,1,\,1)::-:\;((c_{p_k}^{(k)};\,1)) \\ \\ ((b_q;\,1\ldots1))::(01),(01)\ldots(01);\,(d_{q_k}^{(k)})) \end{matrix} \right]$$

$$= \sum_{I_1, I_2, \ldots I_n=0}^{\infty} \frac{\left[(a_p)\right]_{I_1+I_2+\ldots+I_n} \left[(1-c_{p_1})\right]_{I_1}, \ldots, \left[(1-(c_{p_n}^{(n)}))\right]_{I_n}}{\left[(b_q)\right]_{I_1+I_2+\ldots+I_n} \left[(1-(d_{q_1}^{(1)})\right]_{I_1} \ldots \left[1-(d_{q_k}^{(n)})\right]_{I_n}} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{x_k^{I_k}}{I_k!} \right) \right\},$$

जहाँ

$$R_4^* = \frac{\prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{p_k} \Gamma(1-d_j^{(k)}) \prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j) \right\}}{\prod_{k=1}^{n} \left\{ \prod_{j=1}^{p} \Gamma(1-c_j^{(k)}) \prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j) \right\}}.$$

निर्देश

1. एब्रामोविट्ज, एम० तथा आइरीन, ए० स्टेगन, Handbook of Mathematical Functions, डोवर इंक, न्यूयार्क, 1968.
2. लारिसेला, जी०, Rend. Circ. Mat. Palermo, 1893, 7, 111-158.
3. त्रिपाठी, यू० के० तथा पाण्डेय, आर० एन०, J. Sci. Res., 1979-80, **XXX(2)**, 249.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

पर्वतीय स्थानों की पोषणिक समस्याएँ

त्रिभुवन नाथ उपाध्याय तथा कदाम्बी श्रीधरन

रक्षा-शरीर क्रिया विज्ञान एवं सम्बद्ध विज्ञान संस्थान,
दिल्ली छावनी–110010

[प्राप्त–जुलाई 30, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में पर्वतीय स्थानों पर रहने वाले सैनिकों तथा पर्वतारोहियों के लिए समुचित संतुलित आहार की आवश्यकता का विवरण दिया गया है।

Abstract

Dietary problems in hilly place s. *By* T. N. Upadhyay and K. Sridharan, Defence Physiology and Related Science Institute, Delhi Cant. 110010

The present paper describes the need of balanced diet for soldiers and mounttaineers on high altitudes in hilly places.

अनादिकाल से ही मनुष्य पर्वतीय स्थानों के प्राकृतिक सौन्दर्य तथा शान्त वातावरण से आकर्षित होता रहा है। सम्भवतः इन्हीं कारणों से अनेक ऋषियों-मुनियों ने हिमालय क्षेत्र को ही अपना कार्य-स्थल बनाया होगा। इसके साथ ही अनेक देशों की आपसी सीमाओं के रूप में भी ऊँचे-ऊँचे पर्वतों की अपनी महत्ता है। हमारे देश की उत्तरी सीमा का रक्षक पर्वत-राज हिमालय तथा उसकी अनेक चोटियों का सैनिक महत्व है।

ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर रहने वाले लोगों तथा सैनिकों को अनेक प्रतिकूल परिस्थितियों का सामना करना पड़ता है। वायुमंडलीय दाब की न्यूनता, आक्सीजन के आंशिक दाब की कमी, अत्यधिक ठंड, तीक्ष्ण सौर विकिरण (मुख्यतः पराबैंगनी), तेज हवा तथा जमीन के असामान्य उतार-चढ़ाव इत्यादि कष्टमय अवस्थाओं के साथ-साथ पेड़-पौधों, खेती और पेय जल की कमी, आर्द्र वातावरण इत्यादि अनेक भौतिक कारणों का भी मनुष्य के शरीर पर विशेष प्रभाव पड़ता है। वायुमंडलीय दाब की न्यूनता के कारण पानी का क्वथनांक कम हो जाता है जिससे भोजन पकने में अधिक समय लगता है तथा उसके स्वाद में अन्तर पड़ जाता है। उपर्युक्त सारे कारण संयुक्त रूप से पर्वतीय स्थानों पर पोषणिक समस्यायें पैदा करते हैं।

इन प्राकृतिक परेशानियों के अतिरिक्त जब मैदानी स्थानों के निवासियों को अचानक पर्वतीय क्षेत्रों में ले जाया जाता है तो उन्हें "उग्र पर्वत रोग" (Acute Mountain Sickness) का सामना करना पड़ता है जिसके फलस्वरूप वे तेज सिर-दर्द, मिचली, वमन, भूख की कमी, पाचन सम्बन्धित अनेक गड़बड़ियों तथा मूर्छा इत्यादि कठिनाइयों के शिकार हो जाते हैं। पर्वतीय स्थानों पर निवास के प्रारम्भिक दिनों में कम भूख लगने के कारण मनुष्य करीब 25 से 30% कम आहार ग्रहण कर पाता है और उसके भार में कमी आ जाती है। इसके अतिरिक्त अनेक अध्ययनों से पर्वतीय ऊँचाई के कारण आहार-उपयोग में कमी, कुछ विशेष खाद्य-पदार्थों का शरीर द्वारा सहन न किया जाना, प्रोटीन चयापचय की गति में वृद्धि तथा जल और विद्युत अपघट्य संतुलन में गड़बड़ी इत्यादि के सम्बन्ध में भी पता चला है।

इन सभी समस्याओं के समाधान के लिये हमारे अनेक वैज्ञानिक प्रयत्नशील हैं। कुछ इन्हीं अध्ययनों के विषय में इस अनुसंधान पत्र में जानकारी दी जा रही है। इसके साथ-साथ ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर रहने वाले लोगों यथा सैनिकों तथा पर्वतारोहियों के लिये समुचित संतुलित आहार व्यवस्था के सम्बन्ध में भी प्रकाश डाला जायेगा।

1. आवश्यक ऊर्जा की मात्रा, आहारीय घटक तथा जल-संतुलन

(क) ऊर्जा :

किसी विशेष परिस्थति के लिये उपयुक्त ऊर्जा की मात्रा जिन बातों पर निर्भर करती है, उनमें वायुमंडलीय ताप तथा प्रतिदिन की अनेक गतिविधियों में व्यय ऊर्जा मुख्य होती है। सक्रिय लोगों की ऊर्जा ज्यादा व्यय होती है जबकि आराम से बैठकर काम करने वाले लोगों की कम ऊर्जा व्यय होती है। मैदानी इलाकों की तुलना में पहाड़ी स्थानों पर काम के समय प्रतिदिन 6.9 से 25 प्रतिशत अधिक ऊर्जा का व्यय पाया गया है। यह इस अवलोकन से ही स्पष्ट हो जाता है कि पर्वतीय स्थानों पर थोड़ा काम करके ही मनुष्य थक कर हाँफने लगता है। मल्होत्रा[1] के अनुसार समुद्री सतह से 3500 तथा 4300 मीटर ऊँचाई के पर्वतीय स्थानों पर कार्य-रत सेना के जवानों को प्रतिदिन क्रमशः 4205 तथा 4230 किलोकैलोरी ऊर्जा व्यय करनी पड़ती है जबकि समुद्री सतह पर वे मात्र 3200 किलोकैलोरी ऊर्जा व्यय करते हैं। ऊँचे स्थानों पर मनुष्य के अनेक कार्यों के ऊर्जा-मूल्य तथा आधारीय चयापचयात्मक गति (Basal Metabolic Rate) के विषय में काफी विवाद है। यदि मनुष्य ने संकुचित वस्त्र पहनकर अपने आपको ठंड से बचा रखा हैं तो उस पर अत्यधिक शीतल स्थिति का दबाव कम होगा और उसके लिये आवश्यक ऊर्जा के व्यय में कोई विशेष परिवर्तन नहीं होगा। परन्तु ऊँचे स्थानों पर अत्यधिक वस्त्र पहनने के कारण मनुष्य की गतिशीलता प्रभावित होती है। अतः जिन कार्यों के समय शरीर के अनेक अंगों को काफी हिलाना-डुलाना पड़ता है, उनके मूल्यों में वृद्धि हो जाती है जबकि स्थिर अवस्था में एक निश्चित काम के समय मैदानी और पर्वतीय स्थानों पर उनके कार्य मूल्य में कोई अन्तर नहीं पड़ता है। पर्वतीय स्थानों पर बढ़े हुये ऊर्जा व्यय के अनुरूप ही सैनिकों को अधिक खाद्य ऊर्जा की आवश्यकता होती है। अतः समुद्री सतह से 3650, 4000 तथा 4500 मीटर ऊँचाई पर काम करने वाले लोगों को प्रतिदिन क्रमशः 4750, 4600 तथा 4650 किलोकैलोरी आहारीय ऊर्जा की जरूरत होती है।

(ख) शर्करावर्गीय खाद्य आहार (Carbohydrates) :

ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर वायुमंडलीय हवा में आक्सीजन के आंशिक दाब की न्यूनता के कारण, निवास के प्रारम्भिक दिनों में शरीर की कोशिकाओं को कम आक्सीजन मिल पाती है। जब हम आक्सीजन की इस न्यूनता को कार्बोहाइड्रेट की दहन क्रिया की परिपेक्ष्य में देखते हैं तब हम पाते हैं कि बसा-बहुल आहार की तुलना में कार्बोहाइड्रेट-बहुल खाद्य-पदार्थ अधिक उत्तम है। कार्बोहाइड्रेट से दहन के पश्चात् 5.05 किलो कैलोरी तथा वसा से 4.69 किकै० ऊर्जा प्रति लीटर आक्सीजन प्राप्त होती है। कार्बोहाइड्रेट-बहुल आहार से मनुष्य को अधिक काम करने की शक्ति मिलती है तथा उसकी बौद्धिक-कुशलता भी बढ़ती है। कान्सोलाजियों[2] इत्यादि ने ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर कार्य करने वाले लोगों के लिये कम से कम 320 ग्राम कार्बोहाइड्रेट प्रतिदिन लेना आवश्यक माना है। कुछ दिनों के लिये पर्वतीय स्थानों पर भ्रमण के लिये जाने वाले सैलानियों और काफी ऊँचाई पर अत्यन्त सक्रिय पर्वतारोहियों में अधिक मीठे खाद्य-पदार्थों के लिये सामान्यतया एक ललक पाई जाती है जिससे वहाँ पर कार्यरत लोगों के लिये कार्बोहाइड्रेट-बहुल खाद्य पदार्थों की उपयोगिता पर प्रकाश पड़ता है। हिमालय क्षेत्र के मूलनिवासियों के आहार में भी इस घटक का आधिक्य पाया जाता है। इन सभी बातों को ध्यान में रखकर ही पर्वतीय स्थानों में कर्यरत लोगों के आहार में अधिक कार्बोहाइड्रेट घटक की व्यवस्था हैं जिससे उनको कुल आवश्यक ऊर्जा का 67% ऊर्जा प्राप्त होती है।

आहारीय कार्बोहाइड्रेट पचने के पश्चात् ग्लूकोस में बदल जाता है। रात्रि उपवास के बाद रुधिर शर्करा की मात्रा से कार्बोहाइड्रेट चयोपचय की अवस्था के सम्बन्ध में जानकारी मिलती है। श्रीवास्तव[3] इत्यादि ने एक दीर्घकालीन अध्ययन के समय ज्ञात किया कि समुद्री सतह से 4000 मीटर ऊँचाई पर निवास के प्रारम्भिक दिनों में रात्रि उपवास के उपरान्त मनुष्य में रुधिर शर्करा की मात्रा 97.6±2.3 मिग्रा० प्रतिशत से बढ़कर 10 महीनों के बाद 136.7±4.8 मिग्रा० प्रतिशत हो गई। इसके बाद रुधिर ग्लूकोस की मात्रा में घटाव प्रारम्भ हुआ और 24 महीनों के निवास के बाद यह मात्रा 76.4±3.8 मिग्रा० ही पाई गई। ठीक इसी समय लद्दाखी लोगों के रुधिर में ग्लूकोस की मात्रा 86.0±7.28 मिग्रा० पाई गई। इन निष्कर्षों से यह विदित होता है कि समुद्री सतह से 4000 मीटर की ऊँचाइ पर रहने वाले लोगों में ग्लूकोस सहनशीलता सामान्य रहती है। इस ऊँचाई पर निवास के समय हुये रुधिर ग्लूकोस में परिवर्तनों की विस्तृत जानकारी सारणी 1 में दी गई है।

(ग) प्रोटीन

सामान्य स्थितियों में शरीर में अन्तर्ग्रहीत तथा बहिर्गत नाइट्रोजन की मात्रा बराबर रहती है और शारीरिक नाइट्रोजन संतुलन बना रहता है। परन्तु कान्सोलाजिओ[4] तथा सर्क[5] ने 3000 से 5000 मी० ऊँचे पर्वतीय भागों में काम करने वाले मनुष्यों में ऋणात्मक नाइट्रोजन संतुलन पाया। इन दोनों प्रयोगों में मनुष्य की आहारीय ऊर्जा एवम् प्रोटीन घटकों की न्यूनता थी। वे प्रतिदिन मात्र 50 से 60 ग्राम आहारीय प्रोटीन ही प्राप्त करते थे। सम्भवतः इसी कारण अध्ययन के दौरान उनके

सारणी 1

पर्वतीय निवास के समय रुधिर ग्लूकोस में परिवर्तन

अवस्था	समय	रुधिर ग्लूकोस मिग्रा० प्रतिशत
समुद्री सतह		97.6±2.29
ऊँचाई (4000 मीटर)	2 सप्ताहान्त	99.3±3.83
	10 महीना बाद	136.0±4.89
	15 महीना ,,	112.8±3.03
	20 महीना बाद	82.0±3.99
	24 महीना बाद	74.3±3.75
मूल निवासी (लद्दाखी)		86.7±7.28

भार में कमी पाई गई। कान्सोलाजिओं[6] इत्यादि ने एक अन्य प्रयोग में यह देखा कि मनुष्यों को उचित मात्रा में आहारीय ऊर्जा दी जाय तो उनमें नाइट्रोजन संतुलन बना रहता है। आहारीय प्रोटीन चयापचय के पश्चात् ऐमीनो अम्लों में परिवर्तित हो जाते हैं। ये अम्ल शरीर में पुनः प्रोटीन संश्लेषण हेतु उपयोग में लाये जाते हैं। कुछ ऐमीनो अम्ल शरीर द्वारा संश्लेषित नही किये जा सकते हैं जिनको खाद्य पदार्थों के माध्यम से शरीर में पहुँचाना आवश्यक होता है। ऐसे ऐमीनो अम्लों को अति-आवश्यक ऐमीनो अम्ल कहते हैं। व्हिटेन इत्यादि ने[7] रुधिर में कुल अति-आवश्यक ऐमीनो अम्ल तथा कुल अनावश्यक ऐमीनो अम्ल के अनुपात का अध्ययन किया तथा यह पाया कि मनुष्य के पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय इस अनुपात में परिवर्तन हो जाता है। इससे प्रोटीन चयापचय में होने वाले उन परिवर्तनों का ज्ञान होता है जिनसे शरीर द्वारा प्रोटीन उपयोग करने की क्षमता प्रभावित होती है।

प्रयोग की बहुत ही नियंत्रित स्थितियों में श्रीधरन[8] इत्यादि ने देखा कि पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय यदि मनुष्य को 12 ग्राम प्रतिदिन आहारीय नाइट्रोजन मिलती रहे तो उसमें करीब 5 ग्राम का धनात्मक संतुलन बना रहता है। पर्वतीय स्थानों पर निवास के तीसरे दिन ऐसा ही धनात्मक संतुलन कान्सोलाजियो[6] इत्यादि नें भी पाया था। ऊँचे स्थानों पर दो वर्षों से अधिक समय तक निवास के उपरान्त भी नाइट्रोजन उपयोग 85 प्रतिशत से कम नहीं पाया गया। समुद्री सतह से 4000 मीटर की ऊँचाई पर काम करने वाले सैनिकों में नाइट्रोजन उपयोग की जानकारी सारणी 2 में तथा इन स्थानों पर दो वर्षों के निवास के उपरान्त मनुष्य शरीर द्वारा उत्सर्जित नाइट्रोजन की व्यापक जानकारी सारणी 3 में दी गई है।

सारणी 2

समुद्री सतह से 4000 मीटर ऊँचाई पर मनुष्यों में नाइट्रोजन उपयोग

	अन्तर्ग्रहण ग्राम	उत्सर्जन ग्राम	प्रतिशत उपयोग
मैदानी निवासी			
आधारीय मान	21.70	12.12	93.4
पर्वतीय स्थान पर	11.37	10.60	87.4
मूल निवासी लद्दाखी	10.20	9.65	83.6

सारणी 3

पर्वतीय ऊँचाईयों पर 2 वर्षों के निवास के पश्चात् नाइट्रोजन उत्सर्जन

प्राचल	समुद्री सतह	3500 मीटर	4500 मीटर
नाइट्रोजन अन्तर्ग्रहण (ग्राम)	21.70	11.40	10.80
मूत्र में उत्सर्जित कुल नाइट्रोजन (ग्राम)	13.5	9.1	7.38
यूरिया के रूप में उत्सर्जित नाइट्रोजन (ग्राम)	11.5	5.56	5.76
ऐमिनो अम्ल के रूप में उत्सर्जित नाइट्रोजन (ग्राम)	0.12	0.07	0.04
अमोनिया के रूप में उत्सर्जित नाइट्रोजन (ग्राम)	0.50	0.58	0.48
क्रिएटिनीन (ग्राम)	1.27	1.27	1.23
क्रिएटीन (ग्राम)	0.10	0.18	0.18

पर्वतीय स्थानों पर दीर्घकालीन निवास के समय मनुष्य के रुधिर में प्रोटीन की मात्रा में कोई परिवर्तन नहीं पाया गया है। इन स्थानों पर 2 वर्षों तक रहने के पश्चात् रुधिर प्रोटीन 7.18 ग्राम

प्रतिशत ही पाया गया जबकि उन्हीं लोगों में आधारीय स्तर पर यह 7.73 ग्राम प्रतिशत था। पर्वतीय स्थानों पर पूर्ण परिस्थिति अनुकूलन के बाद न तो मनुष्य की कार्य शक्ति में कोई कमी होती है और न ही मांस-पेशी शक्ति में। मल्होत्रा[9] के इस अनुसंधान से यह प्रमाणित होता है कि वहाँ पर पूर्ण परिस्थिति अनुकूलन के पश्चात् प्रोटीन चयापचय में कोई विशेष परिवर्तन नही होता, बशर्ते कि उन मनुष्यों को प्रतिदिन 4500 किलोकैलोरी के साथ-साथ 2 ग्राम प्रति किलोग्राम की दर से आहारीय प्रोटीन घटक मिलता रहे।

(घ) वसीय पदार्थ

मनुष्य को आहार के वसीय पदार्थ मे कार्बोहाइड्रेट और प्रोटीन की तुलना में प्रतिग्राम के हिसाब से करीब दुगुनी ऊर्जा प्राप्त होती है। अतः जिन परिस्थितियों में मनुष्य को अधिक ऊर्जा की आवश्यकता होती है उनमें आहार के माध्यम से ज्यादा वसीय पदार्थ दिया जाता है। पर्वतीय स्थानों पर काम के समय शरीर का ऊतकीय ग्लाइकोजन तेजी से घटने लगता है और मनुष्य प्रायः जल्दी थक जाता है। इस ज्ञान को ध्यान में रखकर ही पहाड़ी प्रदेशों के आहार में प्रतिदिन करीब 140 ग्राम वसीय पदार्थों की आवश्यकता पर बल दिया जाता है।

(ङ) जल-संतुलन

पर्वतीय स्थानों पर रहने वाले मनुष्यों के शारीरिक जल संतुलन के विषय में काफी मतभेद है। कान्सोलाजिओ[4] इत्यादि ने समुद्री सतह से 4300 मीटर ऊँचाई पर स्थित स्थानों पर 4 सप्ताह तक कार्य के समय ऋणात्मक जल संतुलन पाया। अत्यधिक ऊँचे स्थानों पर जल्दी-जल्दी साँस लेने (Hyperventilation) तथा कम आर्द्रता के कारण मनुष्य शरीर में जल की न्यूनता हो जाती है। इन स्थानों पर अल्पकालीन निवास के दौरान मनुष्य के भार में देखी गई कमी का कारण यह शारीरिक जल की न्यूनता भी है, ऐसा मत व्यक्त किया गया है। हरी भारद्वाज तथा मल्होत्रा इत्यादि ने[10] मानव मितीय (Anthropometric) विधियों का उपयोग करके 4000 मीटर ऊँचाई पर कार्यरत सैनिकों के शरीर में जल तथा अस्थि-लवण की मात्रा में कमी का पता लगाया है। परन्तु इन प्रयोगों में सैनिकों के पोषणिक घटकों पर किसी भी प्रकार का नियंत्रण नहीं रखा गया था। श्रीधरन इत्यादि ने[8] यह देखा कि 3500 मीटर ऊँचाई पर काम करने वाले सैनिकों को यदि उचित मात्रा में जल, चाय, दूध, काफी तथा अन्य तरल पेय पदार्थों के रूप में मिलता रहे तो उनमें जल संतुलन बना रहता है। शरीर के इस अपरिवर्तित जल संतुलन को सारणी 4 में प्रदर्शित किया गया है।

हरी भारद्वाज इत्यादि[11] के अनुसार मैदानी प्रदेशों के निवासियों में पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय शरीर में जल की अधिकता पाई जाती है। इसका कारण कोशिकीय जल की मात्रा में बढ़ोतरी तथा शरीर के जल का अन्य अंगों में पुनर्व्यवस्थित होना होता है। ऐसा प्रतीत होता है कि ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर निवास के प्रारम्भिक दिनों में होने वाली जल की न्यूनता एक अस्थाई स्थिति है जिसका कुछ सप्ताह के बाद सामान्यीकरण हो जाता है।

पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय केवल प्यास से ही शरीर के लिये आवश्यक जल की माँग का पता नहीं लग पाता है अतः उन स्थानों पर निवास के कुछ प्रारम्भिक दिनों में जल की न्यूनता हो सकती है जो कि ऊँचाई परिस्थिति अनुकूलन के पश्चात् सामान्य हो जाती है।

सारणी 4

समुद्री सतह से 3500 मीटर ऊपर मनुष्य में जल संतुलन (लीटर प्रतिदिन)

स्थान	जल लाभ				जल हानि				
समुद्री सतह ऊँचाई पर	तरल पेय पदार्थ	आहार के साथ	आहार चयाप-चयी	योग	मूत्र	त्वचा एवं फेफड़े से	मल	योग	संतुलन
दिन	3.16	1.29	0.44	4.89	1.06	3.81	0.17	5.04	−0·15
1.	1.87	0.95	0.30	3.12	1.79	1.36	0.18	3.33	−0.21
2.	1.58	0.96	0.35	2.89	1.57	1.77	0.20	3.54	−0.65
3.	1.44	0.81	0.29	2.54	1.29	1.32	0.17	2.76	−0.22
4.	1.94	1.02	0.36	3.32	1.79	1.23	0.19	3.21	+0.11
5.	2.29	0.78	0.32	3.39	1.64	1.40	0.18	3.22	+0.17
6.	1.82	1.05	0.30	3.17	1.75	1.39	0.15	3.29	−0.12
7.	2.19	0.94	0.35	3.48	1.67	1.49	0.17	3.33	+0.15

2. विटामिन की मात्रा

शरीर की अनेक आक्सीकरण-अवकरण क्रियाओं में आहारीय विटामिनों की महत्ता सर्वविदित है। पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय शरीर पर पड़ने वाले सम्पीडक बल (Stress) के कारण वृवकीय प्रान्तस्था (Adrenal cortex) की क्रियाशीलता बढ़ जाती है और ऐसा सोचा जाता है कि इन परिस्थितियों में मनुष्य को अधिक विटामिन-सी की जरूरत पड़ेगी। आहार में विटामिन-सी की अधिकता से मनुष्य की कार्यक्षमता में भी सुधार पाया गया है। सिट्रस जाति के फलों में विटामिन-सी की प्रचुरता पाई जाती है परन्तु ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर विरल खेती तथा कम पेड़-पौधे के कारण वहाँ के लोगों को ताजे रसीले फल तथा सब्जियाँ इत्यादि उचित मात्रा में नहीं मिल पाती हैं। अतः उन स्थानों के लोगों के आहार में इस विटामिन की न्यूनता हो सकती है जिसके फलस्वरूप वे विटामिन-सी की कमी के शिकार हो सकते हैं। वर्मा इत्यादि[15] ने यह ज्ञात किया है कि पर्वतीय स्थानों पर मनुष्य को आहार से मिलने वाली विटामिन-सी की मात्रा के अतिरिक्त 100 मिग्रा० और देने से उनकी शारीरिक आवश्यकता पूरी हो जाती है। जहाँ तक अन्य विटामनों की आवश्यकता का प्रश्न है, यह अभी तक निश्चित रूप से सिद्ध नहीं हो पाया है कि पर्वतीय स्थानों पर रहने वाले लोगों को अधिक विटामिनों की आवश्यकता होती है अथवा नहीं।

समुद्र तल से 3500 मीटर तथा और ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर कार्यरत भारतीय सैनिकों के लिये प्रस्तावित आहार तथा आहारीय पोषक तत्वों की जानकारी सारणी 5 में तथा उन सैनिकों द्वारा बिभिन्न ऊँचाइयों पर वास्तव में उपयोग में लाये गये आहारीय घटक सारणी 6 में अंकित हैं।

आहार पाचन एवं अवशोषण

पर्वतीय स्थानों पर भ्रमण के उद्देश्य से जाने वाले मनुष्यों में पाचन सम्बन्धित अनेक शिकायतें दृष्टिगोचर होती हैं। एक पर्वतारोहण अभियान के समय पुह[12] ने यह देखा कि समुद्री सतह से 5790 मीटर ऊँचाई पर रुकने वाले पर्वतरोहण के मल के अत्यधिक वसा का त्याग होता है। पिटमैन इत्यदि[13] ने इसका कारण ऊँचे स्थानों पर आक्सीजन के आंशिक दाब की न्यूनता के कारण आँत पर पड़े दुष्पारिणामस्वरूप पचे हुये भोजन का न्यून अवशोषण बतलाया। लेकिन कान्सोलाजियो इत्यादि ने 4300 मीटर की ऊँचाई पर काम करने वाले लोगों में एक सप्ताह तक निवास के समय वसीय पदार्थों के पाचन में सुधार पाया है।

सारणी 5

समुद्री सतह से 3500 मीटर तथा और ऊपर कार्यरत सैनिकों के आहारीय पोषक तत्व

आहारीय घटक	मात्रा
ऊर्जा	4829 मिलोकैलोरी
प्रोटीन	144 ग्राम
वसा	147.9 ग्राम
कार्बोहाइड्रेट	746.8 ग्राम
प्रोटीन से प्राप्त ऊर्जा	576 किलोकैलोरी (11.72%)
वसा से प्राप्त ऊर्जा	1331.1 किलोकैलोरी (27.22%)
कार्बोहाइड्रेट से प्राप्त ऊर्जा	2987.2 किलोकैलोरी (61.06%)
थायमिन	4.5 मिलीग्राम
राइबोफ्लैविन	3.8 मिलीग्राम
निकोटिनिक अम्ल	37.5 मिलीग्राम
विटामिन-सी	247.6 मिलीग्राम
लौह	91.5 मिलीग्राम
कैल्सियम	1.55 ग्राम

सारणी 6

सैनिकों द्वारा विभिन्न ऊँचाइयों पर उपयोग किये गये भोजन के आहारीय घटक

ऊँचाई	कार्बोहाइड्रेट	वसा	प्रोटीन	ऊर्जा
3650 मीटर	740	143	127	4750
4000 मीटर	708	142	122	4600
4500 मीटर	708	148	123	4650

राय इत्यादि[14] ने समुद्री सतह से 3500, 3800 तथा 4700 मीटर ऊँचे पर्वतीय स्थानों पर परिस्थिति अनुकूलन के पश्चात् चार महीनों तक निवास के समय सैनिकों को क्रमशः 128, 168 तथा 198 ग्राम वसा प्रतिदिन मिलाने के बाद 3500 मीटर पर वसा का उपयोग क्रमशः 95.9, 96.2 तथा 96.6 प्रतिशत पाया। समुद्री सतह से 3800 मीटर की ऊँचाई पर 364 ग्राम प्रतिदिन वसा खिलाने के बाद सैनिकों के मल से 11.48 ग्राम वसा का त्याग होता है तथा वसा का उपयोग 96.9 प्रतिशत रहता है। 4700 मीटर की ऊँचाई पर सैनिकों को 232 ग्राम वसा खिलाने से उनके द्वारा 97.5 प्रतिशत वसा उपयोग में आती है। इन परीक्षणों के समय सैनिकों के मूत्र में न तो कीटोन बाड़ीज ही मिले और न ही उनमें कोष्ठबद्धता या आँव की शिकायत पाई गई। यह प्रयोग निर्विवाद रूप से सिद्ध करता है कि 3800 मीटर की ऊँचाई पर 324 ग्राम तथा 4700 मीटर पर 232 ग्राम आहारीय वसा घटक अच्छी प्रकार पच जाते हैं तथा शरीर द्वरा उपयोग में लाये जाते हैं। अतः किन्हीं विशेष परिस्थितियों में अत्यन्त सक्रिय कार्य करने वाले लोगों को पर्वतीय स्थानों पर 233 ग्राम तक वसा दिया जा सकता है। सैनिकों में इतने वसा-बहुल खाद्य पदार्थों की उपयोगिता गश्त तथा अत्यन्त कठिन काम के समय होती है जबकि उन्हें अधिक सान्द्र रूप में ऊर्जा की जरूरत पड़ती है।

समुद्री सतह के मैदानी स्थानों के निवासियों के 3500 मीटर ऊँचाई पर निवास के समय किये गये एक अध्ययन से श्रीधरन इत्यादि[8] ने यह निश्चित कर दिया है कि इस ऊँचाई का मनुष्य में पाचन तथा अवशोषण पर कोई दुष्परिणाम नहीं पड़ता है। इस प्रयोग में आहार के पाचन तथा अवशोषण की विभिन्न अवस्थाओं को प्रदर्शित करने वाले परीक्षण किये गये थे। इनके आँत द्वारा डी-ज़ाइलोज का अवशोषण, पाचक रस की अम्लता, पेन्टागैस्ट्रिन उत्तेजित पाचक रस बनने की गति तथा पेप्सी (पेप्टिक) क्रियाशीलता के अतिरिक्त शरीर द्वारा आहार उपयोग की क्षमता मुख्य हैं।

इस अध्ययन से विदित होता है कि मैदानी स्थानों के निवासियों के समुद्री सतह तथा पर्वतीय स्थानों पर 22 दिनों के निवास के समय, पर्वतीय स्थानों के मूल निवासियों तथा पूर्णरूप से पर्वतीय परिस्थिति अनुकूलित मैदानी निवासियों में आधारीय तथा पेन्टागैस्ट्रिन उत्तेजित पाचक रस के आयतन में कोई महत्वपूर्ण परिवर्तन नहीं होता है। लेकिन पर्वतीय स्थानों के मूल निवासियों में दोनों अन्य समूहों की तुलना में आधारीय तथा पेन्टागैस्ट्रिन उत्तेजित पाचक रस में अम्ल बनने की गति कम होती

है । मैदानी इलाकों के निवासियों में पर्वतीय स्थानों पर निवास के प्रथम दो दिनों में पेप्टिक क्रियाशीलता अधिक पाई जाती है जो कि कुछ दिनों के परिस्थिति अनुकूलन के पश्चात् सामान्य हो जाती है । पर्वतीव स्थानों पर पाचक रस की अम्लता में थोड़ी कमी के कारण वहाँ पर रहने वाले मनुष्यों तथा वहाँ के मूल निवासियों का पेप्टिक अल्सर कम होता है[16] ।

डी-ज़ाइलोज के अवशोषण से हमें आँत द्वारा भोजन की अवशोषण क्षमता का ज्ञान प्राप्त होता है । तीनों समूह के सदस्यों को इस पदार्थ की एक निश्चित मात्रा खिलाकर उनके मूत्र में उत्सर्जित डी-ज़ाइलोज की मात्रा का अध्ययन करने से यह पता चला है कि समुद्री सतह से 3500 मीटर की ऊँचाई के पर्वतीय वातावरण का मनुष्य में पाचन तथा अवशोषण तंत्र पर कोई विशेष दुष्परिणाम नहीं पड़ता है ।

पर्वतीय निवास के प्रथम सप्ताह में मनुष्य द्वारा ऊर्जा उपयोग, मल-मूत्र में वसा पदार्थों का उत्सर्न तथा नाइट्रोजन संतुलन सारणी 7 में दिया गया है ।

सारणी 7

समुद्री सतह से 3500 मीटर ऊँचाई पर आहार उपयोग

प्राचल	समुद्री सतह	ऊँचाई पर निवास के दिन		
		1	2	3
ऊर्जा अन्तर्ग्रहण (मिगा जूल)	13.18	9.06	10.55	8.69
मल द्वारा ऊर्जा क्षय	0.95	0.79	0.64	0.72
प्रतिशत उपयोग	92.68	91.38	93.79	92.85
वसा अन्तर्ग्रहण (ग्राम)	80.15	54.63	66.61	64.41
मल द्वारा उत्सर्जित वसा (ग्राम)	5.01	5.09	2.46	3.61
प्रतिशत उपयोग	93.68	90.67	96.28	94.50
नाइट्रोजन अन्तर्ग्रहण (ग्राम)	11.25	11.60	12.77	12.13
कुल उत्सर्जित नाइट्रोजन (ग्राम)	10.83	9.01	8.46	7.21
नाइट्रोजन संतुलन (ग्राम)	3.40	2.59	4.31	5.91

यद्यपि कि इस प्रपत्र में अवटुग्रन्थि (थाइरॉयड) की क्रियाशीलता के सम्बन्ध में कुछ भी कहना उचित नहीं प्रतीत हो रहा है फिर भी पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय एवं वहाँ के मूलनिवासियों

के आहार में आयोडीन की कमी से उनमें गल-गण्ड नामक बीमारी अधिक पाई जाती है। मैदानी स्थानों के मनुष्यों में पर्वतीय स्थानों पर निवास के समय उनकी अवटुग्रन्थि बढ़ने लगती है परन्तु वहाँ के पुनः मैदानी स्थानों पर वापस आने के पश्चात् थाइरॉयड ग्रन्थि में हुये परिवर्तन दुबारा सामान्य स्तर पर लौट आते हैं। इस संदर्भ में ऊँचे पर्वतीय स्थानों के मूल निवासियों तथा वहाँ काफी दिनों तक रहने वाले अन्य मनुष्यों को आयोडीन मिश्रित नमक की व्यवस्था समयानुकूल होगी।

निर्देश

1. मल्होत्रा, एम० एस० तथा स्वामी, एस० एस०, Human Adaptability to Environment and Physical fitnes, सम्पादक एम० एस० मल्होत्रा 1966.

2. कान्सोलाजिओ, सी० एफ०, जाइन्सन, एच० एल०, क्रिजीविकी एच० जे०, तथा डाज, टी० ए०, **जर्नल आफ फिजियोलाजी**, 1971, 62.

3. श्रीवास्तव, के० के०, कुमारिया, एम० एम० एल०, ग्रोवर, एस० के०, श्रीधरन, के० तथा मल्होत्रा, एम० एस०, **एविएशन स्पेस एण्ड इन्वीरानमेन्टल मेडिसिन**, 1975, 2, 46.

4. कान्सोलाजिओ, सी० एफ०, मैटाश, एल० ओ० तथा नेलसन, आर० ऐ० यू० एस०, **आरमी मेडिकल रिसर्च एण्ड न्यूट्रिशनल लैबोरेटरी रिपोर्ट** न० 289 मार्च 1966.

5. सर्क, एम० आई०, **जर्नल आफ क्लिनिक्ल इन्वेस्टिगेशन** 1966, 45.

6. कान्सोलाजिओ, सी० एफ०, जान्सन, एच० एल०, क्रिजीविकी, एच० जे० तथा डाज, टी० ए०, **अमेरिकन जर्नल आफ क्लिनिक्ल न्यूट्रिशन**, 1972, 25.

7. व्हिटेन, बी० के०, हैनन, जी० पी०, क्लेन, जी० जे० तथा चिन, के० एस० के०, Metabolsim 1968, 4, 17.

8. श्रीधरन, के०, मल्होत्रा, एम० एस०, उपाध्याय, टी० एन०, ग्रोवर एस० के० तथा दुआ जी० एल०, **यूरोपियन जर्नल आफ अप्लाइड फिजियोलाजी**, 1982, 50.

9. मल्होत्रा, एम० एस० तथा सेनगुप्ता, जे०, **मेडिसिन एण्ड स्पोर्ट्स**, 1976, 9.

10. हरी भारद्वाज तथा मल्होत्रा, एम० एस०, **जर्नल आफ मारफोलाजी एण्ड एन्थ्रोपोलाजी**, 1974 3, 65.

11. हरी भारद्वाज, सिंह, ए०पी० तथा मल्होत्रा, एम० एस०, Human Biology, 1973, 3, 45,

12. पुह, एल० जी० सी० ई०, **ब्रिटिश मेडिकल जर्नल**, 1962, 2.

13. पिटमैन, जे० जी०, **कोहेन फिन० न्यू इग्लैण्ड जर्नल आफ मेडिसिन**, 1964, 271.

14. राय, आर० एम०, मल्होत्रा, एम० एस०, डिमरी, जी० पी०, सम्पत कुमार, टी०, **अमेरिकन जर्नल आफ क्लिनिकल न्यूट्रिशन**, 1975, 28.

15. **बर्मा**, जी० एम०, गजपती, आर० तथा घोष, एन० सी०, डिपास रिपोर्ट न० 8/67. रक्षा शरीर क्रिया विज्ञान तथा सम्बद्ध विज्ञान संस्थान

16. **सिंह, आई**०, **चौहान**, आई० एस०, लाल, एम०, खन्ना, पी० के०, श्रीवास्तव, एस० सी०, नन्दा, आर० बी०, लाम्का, जे० एस० तथा मल्होत्रा, एम० एस०, **इन्टरनेशनल जर्नल आफ बायो-मेटिओरोलाजी**, 1977, **21**.

17. क्रिजीविकी, एच० एस०, कान्सोलाजियो, सी० एफ०, मैटास, एल० ओ०, जान्सन एच० एल० तथा बार्नहार्ट, आर० ए० **फेडरेशन प्रोसीडिंग्स फेडरेशन आफ, अमेरिकन सोसाइटी फार एक्स-पेरिमेन्टल** 1969, **28**.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपदों के लिये कतिपय समाकल सम्बन्ध

के० एम० प्रधान तथा एन० के० माहेश्वरी
3231/II बी० एन० कालोनी, देवास, (म० प्र०)

[प्राप्त--जुलाई 20, 1983]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाल ही में प्रधान तथा माहेश्वरी द्वारा प्रवर्तित सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद के लिये समाकल सम्बन्ध प्राप्त करना है। कतिपय विशिष्ट दशाओं की भी व्याख्या की गई है।

Abstract

On some integral relations for the generalized hypergeometric polynomials. *By* K. M. Pradhan and N. K. Maheshwari, 3231/II, B. N. P. Colony, Dewas (M. P.).

Making the use of the generalized hypergeometric polynomial defined recently by Pradhan and Maheshwari[3,4], the authors obtain integral relations for the generalized hypergeometric polynomial. Certain particular cases have also been discussed.

1. प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य हाल ही में प्रधान तथा माहेश्वरी द्वारा प्रवर्तित[3,4] सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद के लिये समाकल सम्बन्ध प्राप्त करना है जो निम्नलिखित रूप में हो

$$K_n(x)=(a)_n/n!\ x^{n(k-1)}\ {}_{p+k+1}F_{q+k+1}\left[\begin{matrix}\triangle(-n, k),\ \triangle(n+a, 1),\ a_1, \ldots, a_p; \\ \triangle(a, k+1),\ b_1, \ldots, b_q;\end{matrix}\ uk^k\, l^1\, x^\mu\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} (\alpha)_n/n!\ x^{(nk-1)} \frac{\prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{-n+i}{k}\right)_r \prod_{i=0}^{l-1} \left(\frac{n+\alpha+i}{1}\right)_r}{r! \prod_{j=0}^{k+1-1} \left(\frac{\alpha+j}{k+1}\right)_r} \frac{(a_p)_r}{(b_q)_r} \cdot u^r k^{kr} l^{1r} x^{\mu r} \qquad (1.1)$$

जहाँ n, k, l यथा α अनृण संख्याएँ हैं, प्राचल a_p तथा b_q सारे के सारे n से स्वतन्त्र हैं, $\triangle(\alpha, m)$ को

$$\alpha/m, (\alpha+1)/m, \ldots, (\alpha+m-1)/m,$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तथा

$$(a_p)_r = \prod_{i=1}^{p} (a_i)_r;\ (b_q)_r = \prod_{j=1}^{q} (b_j)_r$$

बहुपद (1.1) सार्वीकृत रूप में है अतएव प्राचलों के विशेष चुनाव द्वारा अनेक ज्ञात तथा अज्ञात बहुपद प्रदान करता है ।

2. समाकल सम्बन्ध

यदि $Re(\gamma)>0$, $Re(\delta)>0$, तो परिणामी श्रेणी के अभिसरण क्षेत्र के भीतर हमें सरलता से

$${}_{p+k+1+\mu}F_{q+k+1+\mu} \left[\begin{matrix} \triangle(-n, k), \triangle(n+\alpha, 1), \triangle(\gamma+n\overline{k-1}, \mu), a_p \\ \triangle(\alpha, k+1), \triangle(\gamma+\delta+n\overline{k-1}, \mu), b_q \end{matrix}\ u\, k^k\, l^1\, t^\mu \right] = \frac{1}{t^{\gamma+\delta+n\overline{k-1}-1} B(\gamma+n\overline{k-1}, \delta)}$$

$$\cdot \int_0^t x^{\gamma-1}(t-x)^{\delta-1} K_n(x)\, dx \qquad (2.1)$$

प्राप्त हो सकता है जहाँ $\mu>0$ ।

इसी प्रकार जब $\mu=-\mu'$ जहाँ μ' धन पूर्णांक हैं तो ज्ञात फल

$$(a)_{nk} = k^{nk} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a+i}{k}\right)_n;\ (a)_{-nk} = \frac{(-1)^{nk}}{k^{nk} \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{-a+i}{k}\right)_n}$$

का उपयोग करने पर हमें

$$_{p+k+1+\mu}F_{q+k+1+\mu'}\left[\begin{matrix}\triangle(-n,k),\triangle(n+\alpha,1)\triangle(-\gamma-\delta-n\overline{k-1},\mu'),a_p;\\ \triangle(\alpha,k+1)\triangle(-\gamma-n\overline{k-1},\mu'),b_q;\end{matrix}\right]uk^k\,l^l\,t^{-\mu'}$$

$$=\frac{1}{t^{\gamma+\delta+n\overline{k-1}-1}\,B(\gamma+n\overline{k-1},\delta)}\int_0^t x^{\gamma-1}\,(t-x)^{\delta-1}\,K_n(x)\,dx \qquad (2.2)$$

प्राप्त होगा जहाँ $Re(\gamma)>0$, $Re(\delta)>0$.

पुनश्च, $t=1$ रखने तथा x को $x/(1+x)$ द्वारा प्रतिस्थापित करने पर हमें (2.1) तथा (2.2) से

$$_{p+k+1\mu}F_{q+k+1+\mu}\left[\begin{matrix}\triangle(-n,k),\triangle(n+\alpha,1),\triangle(\gamma+n\overline{k-1},\mu),a_p;\\ \triangle(\alpha,k+1),\triangle(\gamma+\delta+n\overline{k-1},\mu),b_q;\end{matrix}\,uk^k\,l^l\right]$$

$$=\frac{1}{B(\gamma+n\overline{k-1},\delta)}\int_0^\infty x^{\gamma-1}\,(1+x)^{-\gamma-\delta}\,K_n\left(\frac{x}{1+x}\right)dx \qquad (2.3)$$

तथा

$$_{p+k+1+\mu'}F_{q+k*1+\mu'}\left[\begin{matrix}\triangle(-n,k),\triangle(n+\alpha,1),(\triangle-\gamma-\delta-n\overline{k-1},\mu'),a_p;\\ \triangle(\alpha,k+1),\triangle(-\gamma-n\overline{k-1},\mu'),b_q;\end{matrix}\,uk^k\,l^l\right]$$

$$=\frac{1}{B(\gamma+n\overline{k-1},\delta)}\int_0^\infty x^{\gamma-1}\,(1+x)^{-\delta-\gamma}\,K_n\left(\frac{x}{1+x}\right)dx \qquad (2.4)$$

प्राप्त होता है जहाँ पूर्णांक $\mu>0$, $\mu'>0$.

3. विशिष्ट दशायें

जब $k=1=1$, $\alpha=1+a+b$, $\mu=1$, $t=1$, तो (2.1) तथा (2.3) क्रमशः

$$_{p+3}F_{q+3}\left[\begin{matrix}-n,n+a+b+1,\gamma,a_p;\\ \triangle(1+a+b,2),\gamma+\delta,b_q;\end{matrix}\,u\right]=\frac{1}{B(\gamma,\delta)}$$

$$\cdot\int_0^1 x^{\gamma-1}\,(1-x)^{\delta-1}\,f_n^{(a,b)}\left[\begin{matrix}a_p;\\ b_q;\end{matrix}\,ux\right]dx \qquad (3.1)$$

एवं

$$_{p+3}F_{q+3}\left[\begin{matrix}-n,n+a+b+1,\gamma,a_p;\\ \triangle(1+a+b,2),\gamma+\delta,b_q;\end{matrix}\,u\right]=1/B(\gamma,\delta)$$

$$\cdot\int_0^\infty x^{\gamma-1}(1+x)^{-\gamma-\delta} f_n^{(a,b)} \left[\begin{matrix} a_p; \\ b_q; \end{matrix} ux/(1+x)\right] dx \quad (3.2)$$

में समानीत हो जाते हैं जो नवीन सार्वीकृत सिस्टर सेलिन बहुपद के लिये समाकल सम्बन्ध हैं जिन्होंने हाल ही में प्रधान तथा माहेश्वरी[4] ने प्रचारित किया है। यदि $a=b=0$ रखें तो आगे ये सिस्टर सेलिन के बहुपद में समानीत हो जाते हैं।

$p=4$ तथा $q=3$ रखने पर (3.1) तथा (3 2) नवीन सार्वीकृत राइस के बहुपद के समाकल सम्बन्धों में समानीत हो जाते हैं

$${}_7F_6\left[\begin{matrix} -n, n+a+b+1, \gamma, a_1, \ldots, a_4; \\ \triangle(1+a+b, 2), \gamma+\delta, b_1, b_2, b_3; \end{matrix} u\right] = (1+a+b)_n/[n!\ B(\gamma, \delta)].$$

$$\cdot\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\delta-1}\, {}_6F_5\left[\begin{matrix} -n, n+a+b+1, \ldots, a_1, a_4; \\ \triangle(1+a+b, 2), b_1, b_2, \ldots, b_3; \end{matrix} ux\right] dx \quad (3.3)$$

तथा

$${}_7F_6\left[\begin{matrix} -n, n+a+b+1, \gamma, a_1, \ldots, a_4; \\ \triangle(1+a+b, 2), \gamma+\delta, b_1, b_2, b_3; \end{matrix} u\right] = (1+a+b)_n/[n!\ B(\gamma, \delta)]$$

$$\cdot\int_0^\infty x^{\gamma-1}(1+x)^{-\gamma-\delta}\, {}_6F_5\left[\begin{matrix} -n, n+a+b+1, a_1, \ldots, a_4; \\ \triangle(1+a+b, 2), b_1, b_2, b_3; \end{matrix} ux/(1+x)\right] dx \quad (3.4)$$

जो पुनः $a_1=(1+a+b)/2$, $a_2=(2+a+b)/2$, $a_2=\rho$, $a_3=b_3$, $b_1=i+a$, $b_2=\sigma$ रखने पर खाण्डेकर[1] के सार्वीकृत बहुपद के लिये समाकल सम्बन्धों में समानीत हो जाता है।

अपरंच, यदि $a=b=0$, $a_1=1/2$, $a_2=b_2$, $a_3=\rho$, $a_4=b_3$, $b_1=\sigma$ रखें तो (3.3) तथा (3.4) राइस के बहुपद के लिये समाकल सम्बन्धों में समानीत हो जाते हैं।

इसी प्रकार (2.1) से (2.4) तक से प्राचलों के विशेष चुनाव से हम विभिन्न बहुपदों के लिये यथा सार्वीकृत हरमिट[5] सार्वीकृत बेसेल[2], जैकोबी, लागेर, बेटमैन आदि के लिये समाकल सम्बन्ध प्राप्त करते हैं।

निर्देश

1. खांडेकर, पी० आर०, Proc. Nat. Acod. Sci. India, A **34**, II, 157-162.

2. क्राल, एच० एल० तथा फिंक, ओ०, Trans. Amer. Math. Soc., 1949, **65**, 100-115.

3. प्रधान, के० एम० तथा माहेश्वरी, एन० के०, Bull. Calcutta Math. Soc. (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)

4. वही, Indian J. Pure Appl. Math., 1978, **2** (9), 923-27.

5. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, न्यूयार्क, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1984

समाकल रूपान्तरों के विषय में

वाई० एस० कुमार स्वामी तथा एस० एन० माथुर
गणित विभाग, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—जुलाई 20, 1983]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में व्हिटेकर रूपान्तर, वर्मा रूपान्तर तथा माइजर रूपान्तर से सम्बन्धित कतिपय प्रमेयों की स्थापना की गई है। दिनेश चन्द्र तथा मकलैचलान द्वारा किये गये अनेक प्रमेय हमारे परिणाम की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

On integral transforms. *By* Y. S. Kumar Swamy and S. N. Mathur, Department of Mathematics, University of Jodhpur, Jodhpur.

In this paper we establish some theorems related to Whittaker transform, Varma transform and Meijer transform. Several theorems given by Dinesh Chandra[2], McLachlan[3] follow as special cases of our result.

1. समाकल

$$\phi(p)=p\int_0^\infty (2xp)^{-1/4}\, W_{k,m}(2xp)\, f(x)\, dx \tag{1.1}$$

जहाँ $W_{k,m}(z)$ व्हिटेर फलन है, सुप्रसिद्ध लाप्लास रूपान्तर

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx \tag{1.2}$$

की सामान्यीकरण है जिसे असमिका

$$(2xp)^{-1/4}W_{1/4\pm1/4}\,(2xp)=e^{-px}$$

की सहायता से प्राप्त करते हैं। अब (1.2) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$\phi(p)=p\int_0^\infty e^{-1/2pt}\,(pt)^{m-1/2}W_{k,m}\,(pt)\,h(t)\,dt \qquad (1.3)$$

निम्नलिखित असमिका के कारण है

$$x^{m-1/2}\,W_{1/2-m,m}\,(x)=e^{-1)2x} \text{ वर्मा } (4, \text{p. } 209)$$

(1.1) को $\phi(p)\underset{m}{\overset{k}{\doteqdot}}f(x)$ के रूप में अंकित किया जाता है जहाँ $\phi(p)$, $f(x)$ सम्बन्धित हैं।

(1.2) को $\phi(p)\doteqdot f(x)$ या $f(x)\doteqdot\phi(p)$ के रूप में अंकित किया जा सकता है।

(1.3) को $\phi(p)\;\underset{k,\,m}{\overset{v}{=\!=}}\;h(t)$ या $h(t)\;\underset{k,\,m}{\overset{v}{=\!=}}\;\phi(p)$ के रूप में अंकित किया जाता है।

2. प्रमेय

यदि

$$f_1(p)\underset{m}{\overset{k}{\doteqdot}}x^{-1}f_2(x),$$

$$f_2(p)\underset{m}{\overset{k}{\doteqdot}}f_3(x)$$

तथा $$p^{1-\lambda+u}f_3(pu)=g(x);\; u\geqslant 1,$$

तो $$f_1(p)=\int_0^\infty g(s)\,\psi(s,p)\,ds \qquad (2.1)$$

जहाँ $$\psi\,(s,p)=W_{\lambda,u}\left(\frac{x}{s^u}\right)$$

तथा $$W_{\lambda,u}\left(\frac{x}{s^u}\right)=\frac{1}{2x^{\lambda/u}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-)^r\,\Gamma*(\lambda/u+r/u+1/4\pm m)}{r!\,(\lambda/u+r/u+3/4-k)}$$

$$\cdot\left(\frac{s^u}{2x}\right)^{r/u}{}_2F_1\left[\begin{matrix}\lambda/u+r/u+1/4\pm m\\ \lambda/u+r/u+3/4-k\end{matrix};\,1/2\right]$$

बशर्ते कि $R(\lambda/u\pm1/4\pm m)>0$, $R(v+5/4\pm m)>0$ तथा $R(u_1+1)>0$, जहाँ $sg\,(s=0\,(s^{u_1}),\,(g)$ $W_{\lambda,k}\,(t_0/s^u)$ परिबद्ध है $t>t_0>0$, $R(p)>p_0>0$ के लिये तथा (2.1) में समाकल पूर्णतया अभिसारी है। संकेत $\Gamma_*\,(\alpha\pm\beta)=\Gamma(\alpha+\beta)\,\Gamma(\alpha-\beta)$ तथा

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a\pm b \\ c \end{matrix} ; x\right] = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a+b,\ a-b \\ c \end{matrix} ; x\right] $$

उपपत्ति

बोस[1] से हमें

$$ f_2(p) \underset{m}{\overset{k}{=}} f_3(x) $$

तथा $p^{1-\lambda+u} f_3(p^u) \doteqdot g(x)$ प्राप्त है ।

तो $$ \frac{1}{p} f_2(p) = \int_0^\infty W_{\lambda, u}(p/s^u)\, g(s)\, ds \qquad (2.2) $$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी है तथा $u \geqslant 1$ परिकल्पना से

$$ f_1(p) = p\int_0^\infty (2xp)^{-1/4}\, W_{k,m}(2xp)\, x^{-1} f_2(x)\, dx \qquad (2.3) $$

(2.3) में (2.2) से $f_2(p)$ का मान प्रतिस्थापित करने पर

$$ f_1(p) = p\int_0^\infty (\exp)^{-1/4}\, W_{k,m}(2xp) \left\{ \int_0^\infty W_{\lambda, u}(x/s^u)\, g(s)\, ds \right\} dx $$

$$ = \int_0^\infty g(s) \left\{ p\int_0^\infty (2xp)^{-1/4}\, W_{k,m}(2xp),\ W_{\lambda, u}(x/s^u)\, dx \right\} ds $$

$$ = \int_0^\infty g(s) \left\{ p\int_0^\infty e^{-px}\, W_{\lambda, u}(x/s^u)\, dx \right\} dx \qquad (2.4) $$

$$ = \int_0^\infty g(s)\, \psi(s, p)\, ds $$

जहाँ $\psi(s,p) \doteqdot W_{\lambda, u}(x/s^u)$

जिससे प्रमेय सिद्ध होती है क्योंकि समाकल के क्रम में परिवर्तन द ला वैली पूसिन प्रमेय से वैध है ।

प्रमेय 2.

यदि

$$ f_1(p) \underset{k,\,m}{\overset{v}{-}} x^{-1} f_2(x);\ f_2(p) \underset{m}{\overset{k}{=}} f_3(x) $$

तथा $$ p^{1-\lambda+u} f(p^u) \doteqdot g(x),\ u \geqslant 1. $$

तो $$f_1(p)=\int_0^\infty g(s)\,\psi(s,p)\,ds$$

जहाँ $$\psi(s,p)\doteqdot W_{\lambda,u}\,(x/s^u)$$

तथा अभिसरण के प्रतिबन्ध प्रमेय 1 जैसे ही हैं।

उपपत्ति

परिकल्पना के अनुसार

$$f_1(p)=p\int_0^\infty e^{-1/2px}\,(px)^{m-1/2}\,W_{k,m}\,(px)x^{-1}\,f_2(x)\,dx$$

$$=p\int_0^\infty e^{-1/2px}\,(px)^{m-1/2}\,W_{k,m}\,(px)\left\{\int_0^\infty W_{\lambda,u}\,(x/s^u)\,g(s)\,ds\right\}dx \quad (2.5)$$

$$=\int_0^\infty g(s)\left\{p\int_0^\infty e^{-1/2px}\,(px)^{m-1/2}\,W_{k,m}\,(px)\,W_{\lambda,u}\,(x/s^u)\,dx\right\}ds$$

$$=\int_0^\infty g(s)\,\psi(s,p)\,dx$$

जहाँ $\psi(s,p)=W_{\lambda,u}\,(x/s^u)$.

प्रमेय 3.

यदि
$$f_1(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} p\int_0^\infty (px)^{1/2}\,K_v(px)\,f_2(x)\,dx$$

तथा $$f_2(p)\,\frac{k}{\overline{m}}\,f_3(x);\; p^{1-\lambda+u}\,f_3(p^u)\doteqdot g(x),\; u\geqslant 1.$$

तो $$f_1(p)=\int_0^\infty g(s)\,\psi(s,p)\,ds$$

जहाँ $$\psi(s,p)\doteqdot W_{\lambda;u}\,(x/s^u)$$

तथा अभिसरण के प्रतिबन्ध प्रमेय 1 के ही समान हैं।

उपपत्ति

परिकल्पना के अनुसार

$$f_1(p)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} p\int_0^\infty (px)^{1/2}\,K_v(px)\,f_2(x)\,dx$$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} p\int_0^\infty (px)^{1/2} K_\iota(px)\left\{p\int_0^\infty W_{\lambda,u}(x/s^u)\, g(s)\; ds\right\} dx$$

$$=\int_0^\infty g(s)\left\{p\int_0^\infty \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} (px)^{1/2} K_v(px)\, W_{\lambda,u}(x/s^u)\, dx\right\} ds$$

$$=\int_0^\infty g(s)\,\psi(s, p)\, ds.$$

समाकलन का क्रम परिवर्तन उपयुक्त प्रकार वैध हैं।

प्रमेय 4.

यदि

$$f(t) \underset{m}{\overset{k}{=}} \phi(p)$$

तो
$$\xi(x, t) \underset{m}{\overset{k}{=}} \phi_1(p)\, h(p)\left\{2x\, .\, h(p)\right\}^{-1/4} W_{k,m}(2x\, h.\, (p)) \tag{2.7}$$

तथा
$$\int_0^\infty \xi(x, t)\, f(x)\; dx \underset{m}{\overset{k}{=}} \phi_1(p)\, \phi[h(p)] \tag{2.8}$$

जहाँ $\phi_1(p)$, $h(p)$ p के संतत फलन हैं जो p से स्वतन्त्र हैं। $R[h(p)]\geqslant p_0>0$; x वास्तविक है तथा $\geqslant 0$.

उपपत्ति

(2.6) में p के स्थान पर $h(p)$ लिखने पर

$$\phi[h(p)]=h(p)\int_0^\infty (2t\, h(p))^{-1/4}\, W_{k,m}(2t\, .\, h(p))\, f(t)\; dt \tag{2.9}$$

चूंकि
$$f(t) \underset{m}{\overset{k}{=}} \phi(p),\ \int_0^\infty (2tp)^{-1/4}\, W_{k,m}(2tp)\, f(t)\; dt$$

$R(p)\geqslant p_0$ के लिये समानीत होता है अतः (2.9) समानीत होता है यदि $[h(p)]\geqslant p_0>0$. (2.9) में दोनों ओर $\phi_1(p)$ से गुणा करने एवं t के स्थान पर x रखने पर

$$\phi_1(p)\,\phi[h(p)$$

$$=\int_0^\infty \phi_1(p)\, h(p)\,(2x\, .\, h(p))^{-1/4}\, W_{k,m}(2x\quad)\, f(x)\; dx \tag{3.0}$$

(2.7) से

$$p\int_0^\infty (2tp)^{-1/4}\, W_{k,m}(2tp)\, \xi(x, t)\; dt$$

$$=\phi_1(p)\, h(p)(2x\,.\,h(p))^{-1/4}\, W_{k,m}\,(2x,\, h(p)) \tag{3.1}$$

(3.0) में (3.1) को प्रतिस्थापित करने पर

$$\phi[h(p)]=p\int_0^\infty (2tp)^{-1/4}\, W_{k,m}\,(2tp)\, \left[\int_0^\infty \xi(x,\, t)\, f(x)\, dx\right] dt \tag{3.2}$$

तो $\displaystyle\int_0^\infty \xi(x,\, t)\, f(x)\, dx \; \frac{k}{m}\; \phi_1(p)\; \phi[h(p)]$

(3.2) में समाकलन का क्रमपरिवर्तन वैध है।

उपप्रमेय 1.

जब उपर्युक्त प्रमेयों में $k=1/4$ तथा $m=\pm 1/4$ तो यह मकलैचलान के फल[2] में समानीत हो जाती है जैसा कि नीचे बतलाया गया है

यदि $(t)\doteqdot\phi(p)$

तथा $\xi(x,\, t)\doteqdot\phi_1(p)\; h(p)\; e^{-xh(p)}$

तो $\displaystyle\int_0^\infty \xi(x,\, t)\, f(x)\; dx\doteqdot\phi_1(p)\; \phi[h(p)]$

जहाँ $\phi_1(p)$, $h(p)$ p के संतत फलन हैं और x से स्वतन्त्र हैं। $R[h(p)]\geqslant p_0>0$; $x>0$ तथा वास्तविक हैं।

उपप्रमेय 2.

यदि

$$f(t)\; \frac{v}{\overline{k,\, m}}\; \phi(p)$$

तथा $\xi(x,\, t\,)\; \dfrac{v}{\overline{k,\, m}}\; \phi_1(p)\; h(p)\; e^{-1/2px}\; (px)^{m-1/2}\; W_{k,m}\,(px)$

तो $\displaystyle\int_0^\infty \xi(x,\, t)\, f(x)\; d(x)\; {}_{k,\, m}\; \phi_1(p)\phi[(p)]$

जहाँ $\phi_1(p)$, $h(p)$ p के संतत फलन है और x से स्वतन्त्र हैं। $R[h(p)]\geqslant p_0>0$. x वास्तविक है तथा $\geqslant 0$.

इसकी उपपत्ति उपप्रमेय 1 की भाँति है क्योंकि लाप्लास रूपान्तर वर्मा रूपान्तर में व्यापकीकृत हो जाता है।

निर्देश

1. बोस, एस० के०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1949, **41**, 9-27, 59-67.

2. दिनेश चन्द्र, **गणित**, 1957, 1-3.

3. मकलैचलान, Modern operational calculus with application in technical mathematics, डोवर पब्लिकेशन्स, न्यूयार्क, 1962.

4. वर्मा, आर० एस०, **करेंट सांइस**, 1947, **16**, 17-18, 209.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 28, No. 2, 1985

फूरियर श्रेणी की (A, λ) संकलनीयता

कु० कल्पना तथा पी० डी० कैथल
गणित विभाग शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, शहडोल

[प्राप्त—जनवरी 9, 1984]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य मिश्रा के परिणाम का व्यापकीकरण करना है जिसमें उनके प्रमेय को कुछ कम कठोर प्रतिबन्ध के अन्तर्गत प्राप्त किया गया है। हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे

प्रमेय

यदि

$$\phi_1(t)=\int_0^t \phi(t)\, dt=0(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to+0$$

तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर योगफल s में संकलनीय (A, λ) है।

Abstract

(A, λ) **Summability of Fourier series.** *By* Kalpana and P. D. Kathal, Department of Mathematics, Goverment Post Graduate College, Shahdol.

The object of the present note is to generalize the result of Mishra by obtaining his theorem under a less stringent condition. Actually we prove

Theorem

If

$$\phi_1(t)=\int_0^t \phi(t)\, dt=0(t) \text{ as } t+\to 0$$

then the Fourier series of $f(x)$ is summable (A, λ) to the sum s at the point x.

1. संकलन की $(J., p_n)$ विधि का प्रवर्तन करते हुये बार्वीन ने[1] परिभाषा दी है।

परिभाषा

माना $p_n > 0$, ऐसा है कि $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$ तथा क्रम संख्या श्रेणी

$$p(r) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n r^n \tag{1.1}$$

के अभिसरण की त्रिज्या 1 है। एक अनन्त श्रेणी Σa_n जिसके आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ का अनुक्रम एक सान्त s के लिये संकलनीय $(J., p_n)$ कहा जाता है यदि

$$\lim_{r \to 1} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n S_n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n} \to s \tag{1.2}$$

बार्वीन ने [2] संकलनीयता की अन्य विधि की भी परिभाषा दी है। एक अनन्त श्रेणी Σa_n आंशिक योग-फलों $\{S_n\}$ के अनुक्रम सहित एक सान्त संख्या s तक संकलनीय (A, λ) कही जाती है यदि $\lambda > -1$ के लिये

$$l_n^{\lambda} = (1-r)^{\lambda+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} S_n r^n = 0\ (1), \text{ ज्यों-ज्यों } r \to 1 \tag{1.3}$$

यह देखना सरल है कि

(a) यदि (1.1) तथा (1.2) में, $p_n = \binom{n+\lambda}{n}$ अर्थात्

$$p(r) = (1-r)^{-\lambda-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n, \lambda > -1, (|r| < 1) \text{ के लिये}$$

तो संकलनीयता $(J. p_n)$, (A, λ) में समानीत होती है।

(b) यदि हम $\lambda = 0$ लें तो परिभाषा (1.3) सामान्य आबेल संकलनीयता में समानीत हो जाती है।

2. प्रस्तावना

माना कि $f(t)$ $(-\pi, \pi)$ परास में लेबेस्ग समाकलनीय है तथा 2π आवर्त के साथ आवर्ती है। माना कि $f(t)$ के सम्बद्ध फूरियर श्रेणी निम्नवत् है

$$\tfrac{1}{2}a^0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt) \tag{2.1}$$

हम निम्नलिखित संकेतों का उपयोग करेंगे

$$\phi(t)=\frac{1}{2}\left\{f(x+t)+f(x-t)-2s\right\}$$

$$h(n,t)=\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}$$

संकलन की (A, λ) विधि का सम्प्रयोग फूरियर श्रेणी में करके मिश्रा[3] ने हाल ही में निम्नलिखित प्रमेय A सिद्ध किया है।

प्रमेय A

यदि

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t|\phi(t)|\,dt=0\,(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to+0$$

तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी x पर योगफल s के लिये संकलनीय (A, λ) है।

प्रस्तुत टिप्पणी का उद्देश्य मिश्रा के प्रमेय को कम कठोर प्रतिबन्ध के अन्तर्गत प्राप्त करके मिश्रा के परिणाम का व्यापकीकरण करना है। वास्तव में हम सिद्ध करेंगे कि

प्रमेय

यदि

$$\Phi(t)\equiv\int_0^t\phi(t)\,dt=0\,(t) \text{ ज्यों-ज्यों } t\to+0 \tag{2.2}$$

तो $f(x)$ की फूरियर श्रेणी बिन्दु x पर योगफल s के लिये संकलनीय (A, λ) है।

3. प्रारम्भिक आकलन

हमें निम्नलिखित आकलनों की आवश्यकता होगी

$0\leqslant r<1$ के लिये

(a) $$h(n,t)=0\left\{\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right\} \quad t<1-r \text{ के लिये} \tag{3.1}$$

(b) $$=0\left\{\frac{1}{t^{\lambda+1}}\right\} \quad t>1-r \text{ के लिये}$$

(a) $$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t}h(n,t)\right\}=0\left\{\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+2}}\right\} \quad t<1-r \text{ के लिये} \tag{3.2}$$

(b) $$=0\left\{\frac{1}{t^{\lambda+3}}\right\} \quad t>1-r \text{ के लिये}$$

(3.1) की उपपत्ति (a)

$$\left|\frac{\sin\left\{(\lambda-1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{(1+r^2-2r)^{(\lambda+1)/2}}$$

$$=0\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right)$$

(3.1) की उपपत्ति (b)

$$\left|\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\ \tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1/2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\left\{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}\right\}^{(\lambda+1)/2}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\left\{4r\sin^2\frac{t}{2}\right\}^{(\lambda+1)/2}}$$

$$=0\left(\frac{1}{t^{\lambda+1}}\right)$$

क्योंकि $\sin\frac{t}{2}\geqslant\frac{t}{\pi}\quad 0\leqslant t>\pi$ के लिये

(3.2) की उपपत्ति (a)

$$\left|\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t}\cdot\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right]\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{t}\ \frac{d}{dt}\left[\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right]\right|$$

$$+\left|\left[\left(-\frac{1}{t^2}\right)\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\ 2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right]\right|$$

$=Z_1+Z_2$ माना (3.1.2.1)

अब

$$Z_1=\left|\frac{1}{t}\left[\frac{\cos\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}\left\{\frac{(\lambda+1)\,r\,(\cos t-r)}{(1+r^2-2r\cos t)}+\frac{1}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(\lambda+1)\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}(2\,r\sin t)}{2(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right]\right|$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+2}}+\frac{1}{(1-r)^{\lambda+3}}\right]$$

$$=0\left(\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+2}}\right),\ \text{क्योंकि}\ \frac{1}{t}>\frac{1}{(1-r)}$$

$$Z_2=\left|\left(-\frac{1}{t^2}\right)\left[\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right]\right|$$

$$\leqslant\frac{\left\{(\lambda+1\frac{rt}{1-r}+\frac{t}{2}\right\}}{(1-r)^{\lambda+1}\,t^2}$$

$$=\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+2}}$$

$$Z_1+Z_2=0\left(\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+2}}\right)$$

(3.2) की उपपत्ति (b)

$t>(1-r)$ के लिये (3-2.1) की सहायता से हम लिखते हैं

$$Z_1=\left|\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left[\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\right]\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{t}\left[\frac{\cos\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}\left\{\frac{r(\lambda+1)(\cos t-r)}{1+r^2-2r\cos t}+\frac{1}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{\lambda+1/2}}\right]\right|$$

$$+\left|\frac{1}{t}\left[\frac{(\lambda+1)\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}(2r\sin t)}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+3)/2}}\right]\right|$$

$$=\left|\frac{r(\lambda+1)(1-r)}{t\{1+r^2-2r\cos t\}^{(\lambda+3)/2}}+\frac{1}{2t\{1+r^2-2r\cos t\}^{(\lambda+1)/2}}\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\{1+r^2-2r\cos t\}^{(\lambda+3)/2}}\right|$$

$\leqslant\frac{1-r}{t^{\lambda+4}}+\frac{1}{t^{\lambda+2}}+\frac{1}{t^{\lambda+3}}$ जिस तरह (3.2) की उपपत्ति है।

$$=0\left(\frac{1}{t^{\lambda+3}}\right)$$

$$Z_2=\frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$=0\left(\frac{1}{t^{\lambda+3}}\right)$$

$Z_1+Z_2=\left(\frac{1}{t^{\lambda+3}}\right)$. (3.2)(a) की उपपत्ति से

4. प्रमेय की उपपत्ति

किसी धन $\eta<\pi$ के लिये फूरियर श्रेणी (2.1) के आंशिक योगफलों $\{S_n\}$ का अनुक्रम रीमैन के लेबेस्ग प्रमेय के द्वारा

$$S_n-s=\frac{2}{\pi}\int_0^{\eta}\frac{\phi(t)}{t}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt+0(1)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\phi(t)}{t}\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt+0(1)$$

है जहाँ $\delta>0$ स्थिर है तथा इस तरह चुना जाता है कि (2.2) सत्य है $t\leqslant\delta$ के लिये[4] अब $S_n(A,\lambda)$ रूपान्तर को t_n^{λ} द्वारा अंकित करने पर हमें परिभाषा से तथा संकलन विधि की नियमितता से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\overset{\lambda}{t_n} - s = \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} \int_0^{\delta} \frac{\phi t}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n \sin(n+\tfrac{1}{2})t \, dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} \int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} I_m \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\lambda}{n} r^n e^{i(n+1/2)t} \, dt + 0(1)\right.$$

जहाँ $I_m F(y)$ संकुल फलन $F(y)$ के काल्पनिक अंश को सूचित करता है

$$= \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} \int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} I_m \left\{ \frac{e^{it/2}}{(1-r\,e^{it})^{\lambda+1}} \right\} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} \int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} \frac{\sin\left\{(\lambda+1)\tan^{-1}\left(\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\right)+\frac{t}{2}\right\}}{(1+r^2-2r\cos t)^{(\lambda+1)/2}} dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} \int_0^{\delta} \frac{\phi(t)}{t} h(n, t) \, dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} \left[\int_0^{1-r} + \int_{1-r}^{s}\right] \frac{\phi(t)}{t} h(n, t) \, dt + 0(1)$$

$$= \frac{2}{\pi}(1-r)^{\lambda+1} [I_1 + I_2] + 0(1) \text{ माना } (4.1)$$

अब खण्डशः समाकलित करने तथा (3.1) (a), (3.2) (a) आकलों एवं परिकल्पना (2.2) का उपयोग करने पर

$$I_1 = \int_0^{1-r} \phi(t) \,.\, \frac{h(n, t)}{t} \, dt$$

$$= \left[\Phi_1(t) \,.\, \frac{h(n, t)}{t}\right]_0^{1-r} - \int_0^{1-r} \Phi_1(t) \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{t} \,.\, h(n, t)\right\} dt$$

$$= \left[0(t) \,.\, 0\left(\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+1}}\right)\right]_0^{1-r} - \int_0^{1-r} 0(t) \,.\, 0\left(\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+2}}\right) dt$$

$$= 0\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right) + 0\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+2}}\right) \int_0^{1-r} dt$$

$$= 0\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right) \tag{4.2}$$

पुनः खण्डशः समाकलित करने तथा (3.1)(b), (3.2)(b) आकलों एवं परिकल्पना (2.2) का उपयोग करने पर

$$I_2=\int_{1-r}^{\delta} \Phi(t) \cdot \frac{h(n, t)}{t} \, dt$$

$$=\left[\Phi_1(t) \cdot \frac{h(n, t)}{t}\right]_{1-r}^{\delta}-\int_{1-r}^{\delta} \Phi_1(t) \frac{dt}{d}\left[\frac{1}{t} \cdot h(n, t)\right] dt$$

$$=\left[0(t) \cdot 0\left(\frac{1}{t(1-r)^{\lambda+1}}\right)\right]_{1-r}^{\delta}+\int_{1-r}^{\delta} 0(t) \cdot 0\left(\frac{1}{t^{\lambda+3}}\right) dt$$

$$=0\left(\frac{1}{(1-r)^{\lambda+1}}\right) \tag{4.3}$$

परिणामों को (4.1), (4.2), (4.3) से एकत्र करने पर

$$t_n^{\lambda}-s=0(1) \quad \text{क्योंकि } r \to 1$$

जिससे प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण होती है।

5. उपसंहार

व्युत्पन्न फूरियर श्रेणी तथा फूरियर गुणांकों के अनुक्रम के लिये भी ऐसे ही परिणाम स्थापित किये जा सकते हैं जिनसे मिश्रा के प्रमेय 3 तथा 4 का व्यापकीकरण हो जावेगा[3]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय सागर विश्वविद्यालय के गणित विभाग के अध्यक्ष डा० पी० एल० शर्मा के कृतज्ञ हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि ली और मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. बार्वीन, डी०, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957, **64**, 342-348.
2. बार्वीन, डी०, Proc. Camb. Phil. Soc. 1957, **53**, 319-322.
3. मिश्रा, बी० पी०, Math Student, 1972, **40A**, 331-339.
4. टिश्मार्श, ई० सी०, Theory of Function, आक्सफोर्ड यूनिवर्सिटी प्रेस 1939.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

क्षारीय माध्यम में क्लोरैमीन-टी द्वारा डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के आक्सीकरण की गतिकी तथा क्रियाविधि

एम० बी० सिंह, ए० के० सामन्त तथा बी० सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—अगस्त 23, 1984]

सारांश

क्लोरैमीन-टी (CAT) द्वारा डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के आक्सीकरण का गतिकीय अध्ययन क्षारीय माध्यम में किया गया। यह अभिक्रिया ऐल्कोहल CAT तथा OH^- प्रत्येक के प्रति प्रथम कोटि की है।

Abstract

Kinetics and mechanism of the oxidation of diacetone alcohol by chloramine-T in aqueous alkaline medium. *By* M. B. Singh A. K. Samant and B. Singh, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

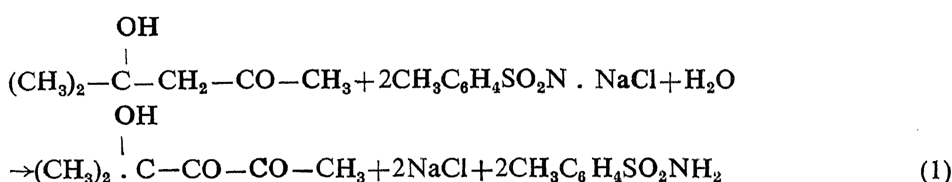
The kinetics of the oxidation of diacetone alochol by chloramine-T (CAT) has been studied in alkaline medium. The reaction is first order in each alcohol, CAT and OH^-, Ionic strength of the medium and addition of p-tolueneslfonamide have no effect while methanol addition has a positive effect on the reaction rate. A suitable mechanism in conformity with the above observations has been proposed.

सोडियम *N*-क्लोरो-4 मेथिल बेंजीन सल्फोनामाइड $p\text{-}CH_3C_6H_4SO_2NCl\ Na.3H_2O$ को सामान्यतया क्लोरैमीन टी (CAT) कहते हैं। इसके अनेक आक्सीकरण अभिक्रियाओं की क्रिया विधि की खोज गतिकीय विधि से की गई[1-11] है। हम अपने पूर्व अध्ययन में[12] क्षारीय माध्यम में CAT के द्वारा मेथिल विनाइल कीटोन तथा आइसोप्रोपिल कीटोन के आक्सीकरण की गतिकी एवं क्रियाविधि की सूचना दे चुके हैं। इस प्रपत्र में जलीय क्षारीय विलयन में डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के आक्सीकरण की गतिकी का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है।

प्रयोगात्मक

समस्त प्रयुक्त अभिकर्मक विशुद्ध कोटि के थे। डाइऐसीटोन ऐल्कोहल (बी० डी० एच०एल० आर०) का प्रयोग बिना अधिक परिष्कार के ही किया गया। p-टॉल्वीन सल्फोनामाइड का नमूना काच लाइट (इंगलैंड) से प्राप्त किया गया। CAT का नमूना ई०मर्क का था और कार्ली बोतल में संग्रह किया गया। समस्त दर सम्बन्धी अध्ययन 35° पर किये गये।

CAT-डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के विभिन्न अनुपात लेकर कई प्रकार से प्रयोग किये गये। प्रत्येक प्रयोग में बचे हुये CAT की मात्रा का परिमापन किया गया। इन अध्ययनों से पता चला कि डाइऐसीटोन के एक मोल ने CAT के दो मोलों का उपयोग किया अतएव स्टायकियोमीटरी समीकरण का सूत्र समीकरण (1) के रूप में निश्चित हुआ। अन्तिम उत्पाद की परीक्षा परीक्षणों द्वारा की गई।[13]



$$(CH_3)_2-\overset{OH}{\overset{|}{C}}-CH_2-CO-CH_3+2CH_3C_6H_4SO_2N . NaCl+H_2O$$

$$\rightarrow(CH_3)_2 . \overset{OH}{\overset{|}{C}}-CO-CO-CH_3+2NaCl+2CH_3C_6H_4SO_2NH_2 \quad (1)$$

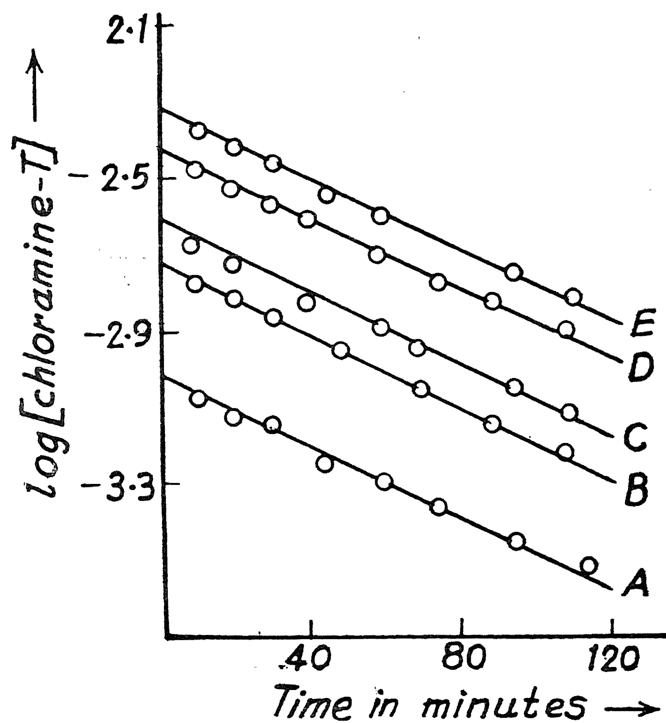
परिणाम तथा विवेचना

CAT द्वारा डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के आक्सीकरण का अध्ययन सबस्ट्रेट CA तथा हाइड्राक्साइड आयनों की सान्द्रता के एक परास में किया गया। स्थिर $[OH^-]$ पर सबस्ट्रेट की मात्रा अत्यधिक होने पर log [CAT] तथा समय के मध्य जो आरेख खींचे गये वे रैखिक थे जो यह बताते हैं कि [CAT] पर दर की प्रथम कोटि की आश्रिता पाई जाती है। डाइऐसीटोन ऐल्कोहल सान्द्रता बढ़ने के साथ क्लोरैमीन टी में प्रथम कोटि के छद्म स्थिरांक (k_1) समान रूप से डाइऐसीटोन ऐल्कोहल के वृद्धि के साथ बढ़े। सबस्ट्रेट पर प्रथम कोटि की आश्रिता भी $\log_k$ तथा log (सबस्ट्रेट) आरेख पर भी स्पष्ट है। इससे ढाल का मान 1.00 के तुल्य आता है (चित्र 2A)।

प्रथम कोटि का दर स्थिरांक k_1 मेथेनाल मिलाने से प्रभावित हुआ (सारणी 2)। log k_1 के विरुद्ध 1/D के आलेख से एक सरल रेखा प्राप्त होती है जिसका ढाल ऋणात्मक है।

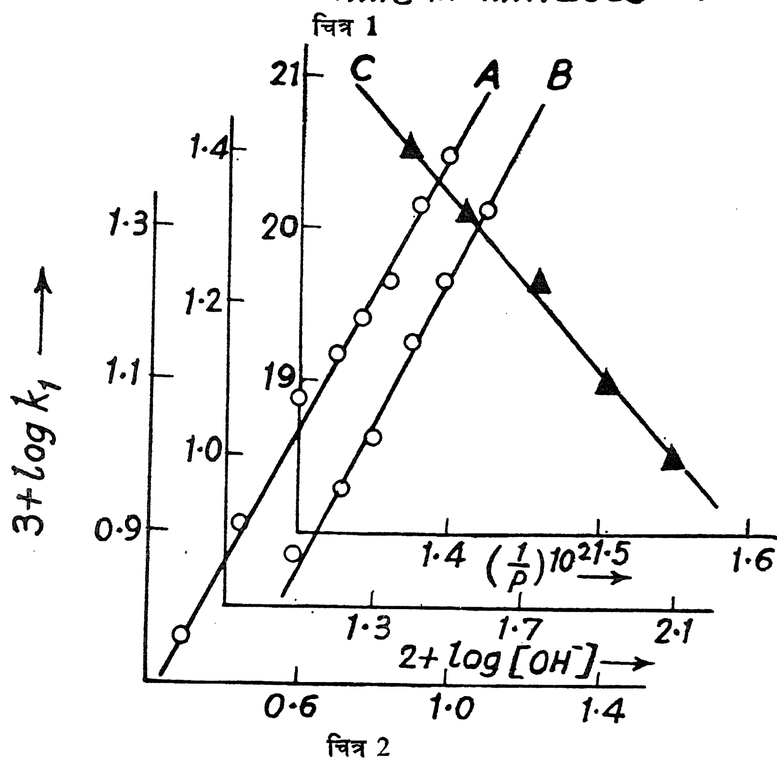
$NaClO_4$ विलयन (सारणी 2) तथा p-टोल्वीन सल्फोनामाइड (TSA) (सारणी 1) के डालने से माध्यम की आयनिक सान्द्रता में वृद्धि होती है जिसका प्रभाव दर पर नगण्य है। हाँ, ताप परिवर्तन से अभिक्रिया दर में उल्लेखनीय प्रभाव पड़ा (सारणी 2)। सक्रियण ऊर्जा, सक्रियण एनट्रापी तथा आवृति गुणक के मान क्रमश: 9.7 k cal/mole, -38.86 e.u तथा 5.66×10^4 1^2 mol^{-2} sec^{-1} थे।

डाइऐसीटोन ऐल्कोहल का आक्सीकरण क्षार द्वारा उत्प्रेरित होता है जिससे यह स्पष्ट सूचित होता है कि क्लोरैमीन-टी के आक्सीकरण में इनॉलीय आयन निहित है।



2·1
– 2·5
–2·9
–3·3
log [chloramine-T] →
E
D
C
B
A
40
80
120
Time in minutes →

चित्र 1



C
A
B
21
20
19
1·4
1·3
1·2
1·1
1·0
0·9
3 + log k_1 →
1·4
$(\frac{1}{P})10^2$ 1·5 →
1·6
1·3
1·7
2·1
2 + log [OH⁻] →
0·6
1·0
1·4

चित्र 2

सारणी 1

अभिक्रिया दर पर अभिकर्मक सान्द्रता का प्रभाव (ताप 35°)

10^3 [CAT M	10^2 [Diacetone alcohol] M	10 [OH^-] M	10^2 k_1 min^{-1}	$k_2=\frac{k_1}{[Substrate]}$ l.mole^{-1} min^{-1}	$10^2k_2=\frac{k_1}{[NaOH]}$ l.mole^{-1} min^{-1}
1.00	4.00	2.00	1.17		
2.00	4.00	2.00	1.19	0.30	5.95
2.05	4.00	2.00	1.18	—	—
4.00	4.00	2.00	1.20	—	—
5.00	4.00	2.00	1.19	—	—
2.00	2.00	2·00	0.58	0.29	—
2.00	3.00	2.00	0.82	0.27	—
2.00	5.00	2.00	1.36	0.27	—
2.00	6.00	2.00	1.51	0.25	—
2.00	7.00	2.00	1.68	0.24	—
2.00	8.00	2.00	2.16	0.27	—
2.00	10.00	2.00	2.48	0.25	—
2.00	4.00	1.25	0.76	—	6.08
2.00	4.00	1.67	0.94	—	5.63
2.00	4.00	2.50	1.43	—	5.72
2.00	4.00	3.00	1.69	—	5.63
2.00	4.00	4.00	2.08	—	5.20
2.00	4.00	2.00	1.20[a]	—	—
2.00	4.00	2.00	1.21[b]	—	—
2.00	4.00	2.00	1.18[c]	—	—

[P—toluene Sulphonamide]=a (1.00 x^{-3}10M), b (2.00 x^{-3}10M]
तथा c (4.00 x^{-3}01M)

सारणी 2

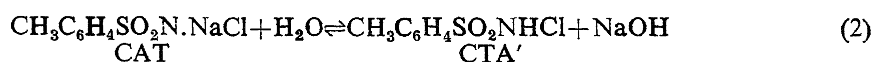
अभिक्रिया दर पर ताप विचरण, आयनी सान्द्रता (μ) विचरण तथा मेथेनॉल विचरण का प्रभाव

[CAT]$=2.00\times10^{-3}$M [Diacetone alchol]$=4.00\times10^{-2}$M; [OH^-]$=2.00\times10^{-1}$M

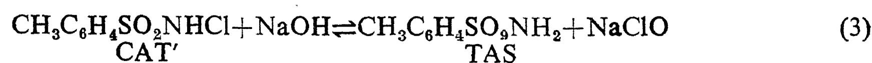
ताप °C	μ M	मेथेनॉल %(v/v)	10^2k_1 min^{-1}
35	0.20	—	1.18
35	0.30	—	1.20
35	0.40	—	1.23
35	0.50	—	1.19
35	0.60	—	1.20
35	0.50	5	1.12
35	0.50	10	1.02
35	0.50	15	0.93
35	0.50	20	0.78
35	0.50	25	0.71
30	0.50	—	0.90
40	0.50	—	1.55
45	0.50	—	1.81

*सोडियम परक्लोरेट विलयन मिलाने से आयनी शक्ति प्रभावित हुई ।

जलीय क्षारीय विलयनों में क्लोरैमीन-टी निम्नलिखित विधि से जलअपघटित होता है[14]



$$\underset{CAT}{CH_3C_6H_4SO_2N.NaCl} + H_2O \rightleftharpoons \underset{CTA'}{CH_3C_6H_4SO_2NHCl} + NaOH \qquad (2)$$



$$\underset{CAT'}{CH_3C_6H_4SO_2NHCl} + NaOH \rightleftharpoons \underset{TAS}{CH_3C_6H_4SO_2NH_2} + NaClO \qquad (3)$$

जहाँ CAT' से p-टॉल्वीन सल्फोक्लोरैमाइड तथा TSA से p-टॉल्वीन सल्फोनेमाइड प्रदर्शित किया गया है ।

इस प्रकार जलीय क्षारीय विलयन में क्लोरैमीन-टी तीन आक्सीकारी स्पीसीज प्रदान करता है CAT, CAT' तथा हाइपोक्लोराइट । इन तीनों में से केवल एक ही डाऐसीटोन ऐल्कोहाल के ईनालिक-

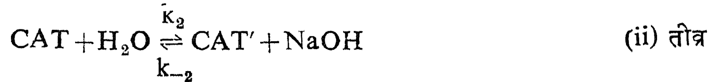
ऋणायन से अभिक्रिया कर सकता है। अब यदि हाइपोक्लोराइट आयन (ClO^-) ही अभिक्रिया करने वाली प्रमुख स्पीशीज है तो :

चूंकि हाइपोक्लोराइट आयन द्वारा क्लोरैमीनT के आक्सीकारक स्पीसीज की भाँति कार्य करने की कोई सम्भावना नहीं है अतएव CAT′ या CAT ही आक्सीकारक स्पीसीज के रूप में बचे रहते हैं।

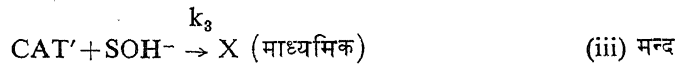
यदि p-टॉल्वीन सल्फोक्लोरौमाइड (CAT′) अभिक्रियाकारी स्पीसीज हो तो निम्नलिखित क्रिया-विधि लिखी जा सकती है



$$S + OH^- \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SOH^- \qquad \text{(i) तीव्र}$$



$$CAT + H_2O \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} CAT' + NaOH \qquad \text{(ii) तीव्र}$$



$$CAT' + SOH^- \xrightarrow{k_3} X \text{ (माध्यमिक)} \qquad \text{(iii) मन्द}$$



$$X + CAT \xrightarrow{k_4} \text{उत्पाद} \qquad \text{(iv) तीव्र}$$

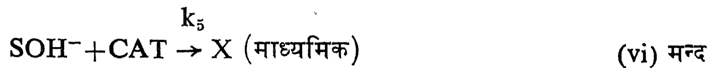
अब [CAT′] तथा [SOH^-] में स्थायी-अवस्था को व्यवहृत करने तथा यह कल्पना करने से कि $k_{-1} \gg k_3[CAT']$ तथा $k_{-2}[NaOH] \gg k_4[X]$, निम्नलिखित दर नियम प्राप्त होता है

$$-\frac{d}{dt}[CAT] = \frac{k_1k_2k_3\,[CAT]\,[S]\,[H_2O]}{k_{-1}k_{-2} + k_1k_3\,[S]} \qquad (4)$$

इस दर नियम से हाइड्राक्साइड आयन सान्द्रता की निर्भरता शून्य कोटि की आती है जो हमारे प्रयोगात्मक निरीक्षणों के विरुद्ध है अतएव CAT′ क्लोरैमीनT की आक्सीकारक स्पीसीज नहीं हो सकती। अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि स्वयं क्लोरैमीन-टी ही अभिक्रिया करने वाली स्पीसीज है जो दर निर्धारक पद में ईनालिक धनायन के साथ अन्त:क्रिया करती है। अतएव निम्नलिखित पदों में क्रिया होगी



$$S + OH^- \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} SOH^- \qquad \text{(v) तीव्र}$$



$$SOH^- + CAT \xrightarrow{k_5} X \text{ (माध्यमिक)} \qquad \text{(vi) मन्द}$$



$$X + CAT \xrightarrow{k_6} \text{उत्पाद} \qquad \text{(vii) तीव्र}$$

$[SOH^-]$ तथा [X] में स्थायी दशा सन्निकटन को प्रयुक्त करने पर तथा यह कल्पना करने पर कि $k_{-1} \gg k_5[CAT]$, निम्नलिखित दर नियम प्राप्त होता है।

$$\frac{-d\,[CAT]}{dt} = \frac{2k_1k_5}{k_{-1}}\,[CAT]\,[S]\,[OH^-] \qquad (5)$$

जहाँ S डाइऐसीटोन ऐल्कोहल को बताता है। उपर्युक्त दर नियम (5) से क्लोरैमीन-टी डाइऐसीटोन ऐल्कोहल तथा हाइड्राक्साइड आयन इन तीनों के प्रति प्रथम कोटि की आश्रिता की प्रागुक्ति होती है। उपर्युक्त दर नियम सक्रियण प्राचलों के भी अनुकूल है।

निर्देश

1. हिगूची, टी० तथा हुसेन, ए०, J. Chem. Soc., 1975, **(B)**, 549.
2. मुशरान, एस० पी०, अग्रवाल, एम० सी० तथा प्रसाद, बी०, J. Chem. Soc., 1971, **(B)**, 1712.
3. मुशरान, एस० पी०, सनेही, आर० तथा अग्रवाल, एम० सी०, Z. Naturforsch, 1972, **27b**, 1161.
4. बालसुब्रमन्यन, वी० तथा थियागराजन, वी०, Aust. J. Chem., 1976, **29**, 1449.
5. नायडू, एच० एम० के० तथा मुशरान, एस० पी०, Monatsh. Chem., 1978, **1** ,
6. अग्रवाल, एम० सी० तथा मुशरान, एस० पी०, J. Chem. Soc., 1973, 762.
7. महादेवप्पा, डी० एस० तथा नायडू, एच० एम० के०, Aust. J. Chem., 1974, **27**, 1203, Inbian J. Chem., 1976, **14(A)**, 808.
8. कुमार, ए०, बोस, ए० के० तथा मुशरान, एस० पी०, Monatsh Chem., 1975, **13**, 106.
9. महादेवप्पा, डी० एस०, जाधव, ए० बी० तथा नायडू एच० एम० के०, Int. J. Chem. Kinetics, 1979, **11**, 261.
10. जाधव, एम० बी०, नायडू, एच० एम० के० तथा महादेवप्पा, डी० एस०, J.Indian Chem. Soc., 1980, **LVII**, 693.
11. वेबर, के० तथा वैलिक, एफ०. Z. Phys. Chem., 1968, **238**, 353.
12. सिंह, बी०, सामन्त, ए० के० तथा सक्सेना, बी० बी० एल०, Tetrahedran, 1982, **38**, 2591.
13. फीगल, एफ०, Spot Tests in Organic Analysis, एल्सेवियर, न्यूयार्क, 1966, पृष्ठ 325.
14. डीट्जेल, आर० तथा टौफैल, के०, Apoth. Ztg., 1929, **44**, 989.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

क्षारीय क्लोरैमीन-टी द्वारा साइक्लोहेप्टैनोन के आस्मियम(VIII) उत्प्रेरित आक्सीकरण की क्रियाविधि

एम० बी० सिंह, आदर्श कुमार, बी० बी० एल० सक्सेना तथा भरत सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—सितम्बर 20, 1984]

सारांश

यह देखने के लिये कि आस्मियम टेट्राक्साइड किस प्रकार उत्प्रेरक के रूप में चक्रीय कीटोनों के आक्सीकरण में भाग लेता है क्षारीय क्लोरैमीन-टी (CAT) द्वारा साइक्लोहेप्टैनोन के आक्सीकरण का अध्ययन पाँच विभिन्न तापों पर किया गया। क्लोरैमीन-टी तथा आस्मियम (VIII) दोनों ही के प्रति अभिक्रिया दर प्रथम कोटि का पाया गया जबकि क्षार तथा कीटोन के प्रति भिन्नात्मक पाया गया। विभिन्न दर प्राचलों की गणना की गई। अन्तिम उत्पाद 1, 2-साइक्लोहेप्टानेडाइओन के रूप में पहचाना गया।

Abstract

Mechanism of osmium(VIII) catalysed oxidation of cycloheptanone by alkaline chloramine-T. *By* M. B. Singh, Adarsh Kumar, B. B. L. Saxena and Bharat Singh, Chemistry Laboratories, University of Allahabad, Allahabad.

The kinetics of OsO_4 catalysed oxidation of cycloheptanone by alkaline-chloramine T (CAT) were studied at five temperatures to see how osmium tetroxide participates as a catalyst in the oxidation of cyclic ketone. The oxidation follows complex kinetics. Reaction rate is first order with respect to both chloramine-T and Os (VIII) and the order with respect to alkali and ketone were found to be fraconal, being —0.85 and 0.35 respectively. Various rate parameters have been calculated. 1, 2- cycloheptanedion identified as the end product. The rate law expression has been obtained in conformity with the above observations as

$$-\frac{d}{dt}[CAT]=k_{obs}\frac{[CAT][OsO_4][Ketone]^{0.35\ (nearly)}}{[NaOH]^{0.85}\ (nearly)}$$

कार्बनिक पदार्थों के आक्सीकरण की गतिकी से सम्बद्ध बहुत कम अध्ययन प्राप्त हैं जिनमें उत्प्रेरक के रूप में आस्मियम (VIII) की उपस्थिति में क्लोरैमीन-टी द्वारा आक्सीकरण किया गया है ।[1-6]

क्लोरैमीन-टी अच्छा आक्सीकारक है । इससे कई आक्सीकारक स्पीसीज उत्पन्न हो सकती हैं जिनकी मात्रा विलयन के पी-एच पर निर्भर करती है[7] । कतिपय कीटोनों के आक्सीकरण में क्लोरैमीन-टी स्वयं मुख्य आक्सीकारक स्पीसीज पाया गया[8]। प्रस्तुत प्रपत्र में क्षारीय माध्यम में क्लोरैमीन-टी द्वारा साइक्लोहेप्टानोन के आक्सीकरण की गतिकी पर के उत्प्रेरित प्रभाव का अध्ययन दिया जा रहा है ।

प्रयोगात्मक

क्लोरैमीन-टी (ई० मर्क) को काली प्रलेपित बोतलों में संग्रह किया गया । प्रयुक्त साइक्लोहेप्टैनोन फ्लूका ए० जी० कोटि का था । सभी विरचनों तथा तनूकरण के लिये दुबारा आसवित जल काम में लाया गया । अभिक्रिया की प्रगति अवशिष्ट क्लोरैमीन-टी की मात्रा से आयोडोमिति द्वारा अप्रत्यक्ष विधि से ज्ञात की गई[9] ।

कई सेटों में प्रयोग किये गये जिनमें क्लोरैमीन-टी तथा साइक्लो-हेप्टैनोन विभिन्न अनुपातों को 0.01MNaOH तथा 3.145×10^{-6}MOsO_4 की उपस्थिति में 55° पर 48 घंटे पर अभिकृत होने दिया गया । परिणामों से यह निष्कर्ष निकला कि 1 मोल साइक्लोहेप्टैनोन के लिये 2 मोल क्लोरैमीन-टी की आवश्यकता होती है और इससे प्राप्त होने वाला उत्पाद 1, 2-डाइओन है जिसकी परीक्षा पारम्परिक विधि से की गई[10] ।

परिणाम तथा विवेचना

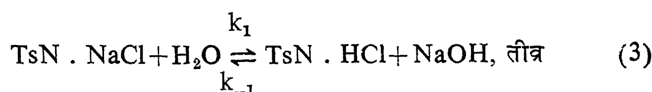
आक्सीकरण गतिकी का अध्ययन अभिकर्मकों की अनेक सान्द्रताओं पर आस्मियम (VIII) तथा NaOH की स्थिर मात्रा की उपस्थिति में सम्पन्न किया गया (सारणी 1) ।

साइक्लोहेप्टैनोन का आक्सीकरण केवल क्षारीय माध्यम में ही अग्रसर होता है किन्तु स्थिर आयनी सान्द्रता पर क्षार की प्रारम्भिक सान्द्रता में वृद्धि से अवरोधक प्रभाव देखा जाता है (सारणी 2) ।

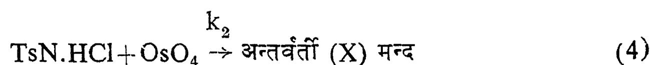
Os (VIII) की मात्रा परिवर्तित करने पर आक्सीकरण की दर उत्प्रेरक की सान्द्रता से प्रत्यक्ष समानुपाती पायी गयी (सारणी 3) ।

विभिन्न उष्मागतिक प्राचलों के मान इस प्रकार प्राप्त हुये : सक्रियकरण की ऊर्जा ($\triangle E\neq$), 13.6 किक०/मोल, आवृति गुणक (A) $1.43 \times 10^{9} S^{-1}$, सक्रियकरण की एन्ट्रापी ($\triangle S\neq$) −17.9 e. s. u. तथा सक्रियकरण की मुक्त ऊर्जा ($\triangle G\neq$) 18.61 किकै/मोल ।

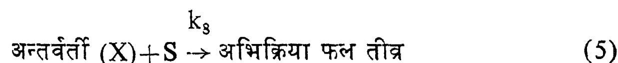
क्लोरैमीन-टी (TsN . NaCl) जहाँ Ts=($CH_3C_6H_4SO_2$) द्वारा साइक्लोहेप्टैनीन (S) के आक्सीकरण के लिये निम्नलिखित पद सुझाये जाते हैं ।



$$TsN\,.\,NaCl + H_2O \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} TsN\,.\,HCl + NaOH, \text{ तीव्र} \qquad (3)$$



$$TsN.HCl + OsO_4 \xrightarrow{k_2} \text{अन्तर्वर्ती (X) मन्द} \qquad (4)$$



$$\text{अन्तर्वर्ती (X)} + S \xrightarrow{k_3} \text{अभिक्रिया फल तीव्र} \qquad (5)$$

ऐसीटोन तथा एथिल मेथिल कीटोन के आस्मियम टेट्राक्साइड द्वारा उत्प्रेरिक आक्सीकरण में[3] चक्रीय मध्यवर्ती (X) का निर्माण सूचित किया गया है।

क्लोरैमीन-टी के उपयोग के दर को निम्नवत् प्रदर्शित किया जाता है

$$-\frac{d}{dt}[\text{Chloramine-T}] = k_1 [TsN.NaCl][H_2O] - k_{-1}[TsN.HCl][NaOH] \qquad (6)$$

स्थायी दशा उपचार को व्यवहृत करने पर

$$[TsN\,.\,HCl] = \frac{k_1 [TsN\,.\,NaCl][H_2O]}{k_{-1}[NaOH] + k_2 [OsO_4]} \qquad (7)$$

(6) में (7) से [TsN.HCl] का मान रखने पर दर नियम समीकरण निम्नवत् हो जाता है

$$-\frac{d}{dt}[\text{Chloramine-T}] = \frac{k_1 k_3 [TsN.NaCl][H_2O][OsO_4]}{k_{-1}[NaO] + k_2 [OsO_4]} \qquad (8)$$

चूंकि $k_{-1}[NaOH] \gg k_2 [OsO_4]$ प्रयोगात्मक प्रतिबन्धों के अन्तर्गत है अतएव दर नियम (8) निम्न प्रकार हो जावेगा

$$-\frac{d}{dt}[\text{Chloramine-T}] = \frac{k_1 k_2 [TsN\,.\,NaCl][H_2O][OsO_4]}{k_{-1}[NaOH]} \qquad (9)$$

$$= \frac{k [CAT][OsO_4]}{[NaOH]} \qquad (10)$$

जहाँ $k = \frac{k_1 k_2}{k_{-1}} [H_2O]$

उपर्युक्त दर नियम समीकरण से भविष्यवाणी होती है कि क्लोरैमीन-टी तथा आस्मियम टेट्राक्साइड में प्रथम कोटि की निर्भरता है किन्तु OH^- आयन तथा अपचायक सब्स्ट्रेट में यह क्रमशः —1 तथा 0 है। अतएव यह स्पष्ट है कि पद (5) में ईनाल ऋणायन को चक्रीय कीटोन की प्रमुख अभिक्रियाकारी प्रजाति मानने पर भिन्नात्मक कोटि में थोड़े से विचलन की व्याख्या की जा सकती है।

इस प्रकार यह निष्कर्ष निकलता है कि क्लोरैमीन-टी द्वारा क्षारीय माध्यम में साइक्लोहेप्टैनोन के OsO_4 उत्प्रेरित आक्सीकरण के दौरान दर निर्धारण पद में आस्मियम टेट्राक्साइड तथा N-क्लोरोटोल्वीन p-सल्फोनामाइड के मध्य एक संकुल बनता है जो बाद में अपचायक सब्स्ट्रेट के ईनाल ऋणायन के साथ अभिक्रिया करता है।

सारणी 1

दर स्थिरांकों पर अभिकर्मक सान्द्रता का प्रभाव

[NaOH]=0.0M, [Os (VIII)]=3.145×10^{-6} M,

10^3 [Chloramine—T] M	10^2 [Cycloheptanone] M	$k_1 \times 10^5$ 40°C	sec^{-1} 45°C
0.6	1.0	16.2	22.7
0.8	1.0	16.2	22.7
1.0	1.0	16.1	22.3
1.2	1.0	15.9	22.5
1.6	1.0	15.8	22.2
1.0	0.6	14.5	22.1
1.0	0.8	15.5	22.1
1.0	1.2	17.5	22.8
1.0	1.6	17.8	23.0
1.0	2·0	18.2	24.0

सारणी 2

अभिक्रिया दर पर NaOH सान्द्रता का प्रभाव

[Cycloheptanone]=0.01 M, [Os (VIII)]=3.145×10^{-6} M

[Chloramine-T]=1×10^{-3} M

10^3 [NaOH] M	$k'_1 \times 10^5$ 40°C	sec^{-1} 45°C
8		25.50
10	16.10	22.30
14	12.40	18.20
20	9.80	14.00
30	7.86	11.40

सारणी 3

अभिक्रिया दर पर आस्मियम (VIII) सान्द्रता का प्रभाव

[NaOH]=0.01 M, [Chyloramine-T]=1×10^{-3} M

[Cycloheptanone]=0.10 M

10^6 [OsO_4] M	$k'_1 \times 10^{-5}$ 40°C	sec^{-1} 45°C
1.887	11.2	14.5
2.516	13.8	18.5
3.145	16.1	22.3
3.774	18.8	25.0
3.032	24.0	32.8

निर्देश

1. मुशरान, एस० पी०, अग्रवाल, एम० सी०, प्रसाद, बी०, J. Chem. Soc. 1971, (B), 1712.
2. मुशरान, एस० पी०, मेहरोत्रा, आर० एम० तथा सनेही, आर०, Proct. Nat. Acad. Sci. India, 1973, **43A**, 105.
3. मुशरान, एस० पी०, सनेही, आर० तथा अग्रवाल, एम० सी०, *Z.* Naturforsch, 1972, **27B**, 10.
4. बालासुब्रमन्यन, वी० तथा थियागराजन, वी०, International J. of Chemical Kinetics, 1975, VII, 605.
5. राधाकृष्ण मूर्ति, पी० एस० तथा साहू, बी०, Indian J. Chem. 1977, **15A**, 700.
6. मुशरान, एस० पी०, सनेही, आर० तथा बोस, ए० के०, Acta Chemice Acad. Sci. Hungaricae, 1975, **84**, (2) 135.
7. बिशप, ई० तथा जेनिंग्स, बी० जे०, Talanta 1958, **1**, 197.
8. कुमार आदर्श, बोस, ए० के० तथा मुशरान, एस० पी०, Annal. Soc. Sci. Bruxelies, 1975, **89**, 567.
9. बर्का, ए० जे०, वल्टेरिन, जे० ज्यकी, Newer Redox Titrants, पर्गमान प्रेस, 1965 पृष्ठ 43.
10. फीगल, एफ०, Spot Tests in Organic Analysis, एल्सेवियर पब्लिशिंग कम्पनी न्यूयार्क 1966 पृष्ठ० 441.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

H-फलन वाला समाकल-III

अरुण के० राठी

गणित विभाग, राजऋषि स्नातकोत्तर महाविद्यालय, अलवर

[प्राप्त—दिसम्बर 17, 1982]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य हाइपरज्यामितीय फलन तथा H-फलन वाले एक समाकल का मान निकालना है, जिसमें कल्ला द्वारा दिये गये कई परिणाम इसकी विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

An integral involving ***H*****-function-III.** *By* Arjun K. Rathie, Department of Mathematics, Raj Rishi P. G. College, Alwar.

The object of this paper is to evaluate an integral involving hypergeometric function and the H-function which includes as its particular cases several results given by Kalla[3,4].

1. प्रस्तावना

फाक्स[2] द्वारा प्रवर्तित H-फलन को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित तथा प्रदर्शित किया जावेगा

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}1(a_j, e_j)_p\\ 1(b_j, f_j)_q\end{matrix}\right]=(2\pi i)^{-1}\int_L \theta(s)\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, L एक मेलिन-बार्नीज प्रकार का उपयुक्त कंटूर है तथा प्राचल इस प्रकार सीमित हैं कि H-फलन सार्थक है जहाँ

$$\theta(s)=\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-f_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+e_js)/\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+f_js)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-e_js) \tag{1.2}$$

ब्राक्समा[1] ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दक्षिण पक्ष का समाकल परम अभिसारी होता है जब $\phi>0$ तथा $|\arg z|<\frac{1}{2}\phi\pi$, जहाँ

$$\phi=\sum_{j=1}^{n}e_j-\sum_{j=n+1}^{p}e_j+\sum_{j=1}^{m}f_j-\sum_{j=m+1}^{q}f_j \tag{1.3}$$

2. प्रमुख परिणाम

सर्वप्रथम हम निम्नलिखित परिणाम सिद्ध करेंगे। यह परिणाम नया प्रतीत होता है। कुछ रोचक विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1}[ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma}\,{}_2F_1\left[\alpha,\beta;\gamma;y\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\sigma)}{a^{\rho}b^{\sigma}\,\Gamma(\rho+\sigma)}\,{}_3F_2\,[\alpha,\beta,\rho,\gamma,\rho+\sigma;y] \tag{2.1}$$

जहाँ $Re(\rho)>0$, $Re(\sigma)>0$, $Re(\gamma-\sigma-\beta)>0$, $\arg(1-y)|<\pi$, a तथा b अनृण अचल हैं, और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये हाइपरज्यामितीय फलन को श्रेणी के रूप में व्यक्त किया जाता है; समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदला जाता है जो अन्तराल [0,1] में श्रेणी के एकसमान अभिसरण के कारण वैध हैं; ज्ञात परिणाम [5, p-450 (1)] की सहायता से समाकल का मान ज्ञात किया जाता है और तब श्रेणियों का योग करते हैं तो हमें (2.1) की प्राप्ति होती है।

(2.1) की विशिष्ट दशायें

(i) यदि हम $y\to 1$ लें तो

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-1)^{\sigma-1}[ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma}\,{}_2F_1\left[\alpha,\beta;\gamma;\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\rho+\sigma)\,a^{\rho}b^{\sigma}}\,{}_3F_2[\alpha,\beta,\rho;\gamma,\rho+\sigma;1] \tag{2.2}$$

जहाँ $Re(\rho)>0$, $Re(\sigma)>0$, $Re(\gamma-\alpha-)>0$, a तथा b अनृण अचल हैं तथा व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

(ii) यदि हम (2.1) में $\rho=\gamma$ लें तो हमें शर्मा का परिणाम[5] प्राप्त होता है।

(iii) यदि हम (2.2) में $\sigma=\beta-\rho$ लें तो हमें निम्नलिखित फल मिलता है।

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\beta-1-\rho}\,[ax+b(1-x)]^{-\beta}\,{}_2F_1\left[\alpha,\beta;\gamma;\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]dx$$

$$=\frac{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\rho)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\rho)}{a^{\rho}\,b^{\beta-\rho}\,\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\rho)\Gamma(\gamma-\alpha)} \tag{2.3}$$

जहाँ $Re(\rho)>0$, $Re(\beta-\rho)>0$, $Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$, a तथा b अनृण अचल हैं और व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं हैं।

इस प्रपत्र में निम्नलिखित समाकल का जिसमें हाइपरज्यामितीय फलन तथा H-फलन निहित हैं मान ज्ञात किया गया है :

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\sigma-1}[ax+b(1-x)]^{-\rho-\sigma}\,{}_2F_1\left[\alpha,\beta;\gamma;y\frac{ax}{ax+b(1-x)}\right]$$

$$\times\,\bar{H}^{m,n}_{p,q}\left[z\frac{(ax)^{\lambda}[b(1-x)]^{\mu}}{[ax+b(1-x)]^{\lambda+\mu}}\left|\begin{matrix}1(a_j,e_j)_p\\1(b_j,f_j)_q\end{matrix}\right.\right]dx \tag{2.4}$$

$$=a^{-\rho}b^{-\sigma}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r\,y^r}{(\gamma)_r\,!r}$$

$$\bar{H}^{m,n+2}_{p+2,q+1}\left[z\left|\begin{matrix}(1-\sigma,\mu),(1-\rho-r,\lambda),1(a_j,e_j)_p\\1(b_j,f_j)_q,(1-\rho-\sigma-r,\lambda+\mu)\end{matrix}\right.\right]$$

जहाँ $\lambda>0$, $\mu>0$, $Re(\gamma-\alpha-\beta)>0$, $Re[\rho+\lambda(b_j/f_j)]>0$, $Re[\sigma+\mu(b_j/f_j)]>0, j=1,\ldots m$; $|\arg(1-y)|<\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\phi\pi$, $\phi>0$, जहाँ ϕ वही है जैसा कि (1.3) में, a तथा b अनृण अचल हैं तथा व्यंजक $[ax+b(1-x)]$, जहाँ $0\leqslant x\leqslant 1$ शून्य नहीं है।

उपपत्ति

(2.4) को सिद्ध करने के लिये (2.4) के वाम पक्ष को I द्वारा प्रदर्शित करते हैं, (2.4) के समाकल में (1.1) से मेलिन-बार्नीज समाकल के पदों में H-फलन का मान रखते हैं, समाकलन के क्रम को बदलते हैं जो इस विधि में निहित समाकलों की परम अभिसरण के कारण वैध है, परिणाम (2.1) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करते हैं तो हमें प्राप्त होता है

$$I=(2\pi i)^{-1}\int_L \theta(s)\, z^s\, a^{-\lambda s}\, b^{-\mu s}\frac{\Gamma(\rho+\lambda s)\,\Gamma(\sigma+\mu s)}{\Gamma(\rho+\sigma+\lambda s+\mu s)}$$

$$\times\ {}_3F_2\,[\alpha,\beta,\rho+\lambda s;\gamma,\rho+\sigma+\lambda s+\mu s;y]\,ds \tag{2.5}$$

अब ${}_3F_2$ को श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं, थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् समाकलन तथा संकलन के क्रम को बदलते हैं और (1.1) के साथ इसकी व्याख्या करते हैं तो हमें वांछित परिणाम (2.4) की प्राप्ति होती है।

3. विशिष्ट दशायें

1. यदि हम (2.4) में $\lambda=\mu=1$, $e_j=1, j=1, \ldots, p$; $f_j=1, j=1, \ldots, q$ लें तो हमें विख्यात G-फलन के लिये संगत समाकल प्राप्त होता है।

2. यदि हम (2.4) में $y\to 1$, $\alpha=\gamma$ लें तो थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें कल्ला का परिणाम[3] प्राप्त होता है।

3. यदि हम (2.4) में $\alpha=0$ लें तो थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें कल्ला का अन्य परिणाम[4] प्राप्त होता है।

इसी प्रकार से हमारे मुख्य समाकल से कई ज्ञात तथा अज्ञात परिणाम प्राप्त किये जा सकते हैं।

निर्देश

1. ब्राक्समा, बी० एल० जे०, Comp. Math., 1963, **15**, 239-341.

2, फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 295-429.

3. कल्ला, एस० एल० तथा डी ऐंजेलो, Univ. Nac. Tucuman, 1973, **23A**, 83-87.

4. कल्ला, एस० एल० तथा गोमेज लोपेज, ए० एम० एम०, Univ. Nac. Tucuman, 1972, **22A**, 165-170.

5. शर्मा, बी० एल० ,विक्रम यूनि० मैथ०जर्न०, 1966, **10**, 79-83.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

जीवाणु द्वारा जल के प्रकाश अपघटनी विखण्डन पर खनिज विलयन का प्रभाव

के० बहादुर, एस० रंगनायकी तथा एस० जे० सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जून 20, 1984]

सारांश

यह देखा गया है जीवाणु तथा जल के मिश्रण में खनिज विलयन डालने से जीवाणु द्वारा सूर्य प्रकाश में अनुप्रभावन से जल विखण्डन करने का गुण बढ़ जाता है किन्तु यदि खनिज विलयन की सान्द्रता बढ़ाई जाय तो जल विखण्डन क्षमता घट जाती है। सूर्य प्रकाश में रखे हुये जल के विखण्डन के लिये जीवाणु: जल: खनिज मिश्रण का विशिष्ट अनुपात सर्वोत्तम सिद्ध हुआ।

Abstract

Effect of mineral solution on photolytic splitting of water by Jeewanu. *By* K. Bahadur, S. Ranganayaki and S. J. Singh, Chemistry Department, Allahabad, University, Allahabad.

It has been observed that particles are formed in sterilised aqueous mixtures containing ammonium molybdate, di-ammonium hydrogen phosphate, biological minerals and formaldehyde in the ratio of 1 : 2 : 1 : 1 respectively on exposure to sunlight for 24 hours and on completion of exposure period these particles were filtered and dried.

It has been further observed that these dried particles and water mixture have the ability of water splitting on exposure to sunlight and liberate gases. The gas liberation was studied by bubble counting. The gas bubbles were of about 1mm. diameter.

It was further observed that addition of mineral solution to the mixture contain ing Jeewanu and water enhances the water splitting property of Jeewanu on exposure

to sunlight but on increasing the concentration of mineral solution it decreases water splitting. A specific ratio of Jeewanu-water-mineral solution mixture is the best medium for the splitting of water on exposure to sunlight.

अनेक जैव इलेक्ट्रान स्थानान्तरण प्रणालियों के लिये फेरेडाक्सिन अनिवार्य है।[1] क्लोरोप्लास्ट प्रणाली अक्षत झिल्ली तथा क्लोरोफिल, फेरेडाक्सिन एवं हाइड्रोजन के साथ सूर्य प्रकाश द्वारा अनुप्रभावित किये जाने पर जल अणुओं को विखण्डित कर सकती है। इस प्रणाली में फेरेडाक्सिन के स्थान पर जीवाणु का उपयोग अत्यन्त सफलतापूर्वक प्रयोगशाला में किया जा सकता है। सोडियम डाइथायोनेट या क्लोरोप्लास्ट से क्ला पैस्टोरियानम हाइड्रोजनेस तक इलेक्ट्रान स्थानान्तरण का कार्य यह जीवाणु कर सकता है।[2]

जीवाणु प्रोटोसेल है जिन्हें सरल कार्बनिक तथा अकार्बनिक पदार्थों के जलीय मिश्रण में प्रकाशरासायनिक विधि से संश्लेषित किया जा सकता है। इनमें वृद्धि, गुणन तथा उपापचयी सक्रियता के गुण पाये जाते हैं[3]। इन सूक्ष्म संरचनाओं की निश्चित बाह्य भित्ति होती है और आन्तरिक संरचना अत्यन्त जटिल होती है[4] ये आजकल के सेलों (कोशिकाओं) से रासायनिक संघटन में बहुत कुछ समान हैं।[5] इन कणों में मालिब्डनम की उच्च मात्र रहती है और साथ ही अनेक ऐमीनों अम्ल मुक्त तथा संयुक्त रूपों में पाये जाते है।[5] जीवाणु तथा जल के मिश्रणों में प्रकाशरासायनिक इलेक्ट्रान स्थानान्तरण[6,7] प्रणाली पाई जाती है। हाल ने[8] इसमें फेरेडाक्सिन जैसी सक्रियता की पहचान की है। स्मिथ[9] ने जीवाणु में नाइट्रोजनेस जैसी सक्रियता पाई है। फाल्सोम[10] ने देखा है कि जीवाणु ऐसिटिलीन को एथिलीन में अपचित करने के लिये जल के प्रोटान का उपयोग करता है। यह भी देखा गया है कि जीवाणुओं में सूर्य प्रकाश में अनुप्रभावन द्वारा जल विखण्डन करने की क्षमता आ जाती है[10]। यह भी देखा गया है कि अनुप्रभावन के पूर्व जीवाणु खनिज विलयन का अधिक भाग उपयोग में लाते हैं और उत्पन्न कणों की संख्या कम होती है किन्तु वे जल अणु को विखण्डित कर सकते हैं[11]। यदि मूल खनिज विलयन में ऐसीटिक अम्ल रहे तो जल के विखण्डन से अधिक गैसें बनती हैं[12]।

इस पृष्ठभूमि के आधार पर प्रकाशरासायनिक विधि से तैयार की गई सूक्ष्म संरचनाओं का (जिन्हें जीवाणु कहते हैं) परीक्षण जल के प्रकाशरासायनिक विखण्डन के लिये किया गया।

प्रयोगात्मक

विलयन की तैयारी :

निम्नलिखित विलियन तैयार किये गये

1. 100 मिली० 4% अमोनियम मालिब्डेट।
2. 100 मिली० 3% डाइअमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट।
3. खनिज विलयन–सोडियम क्लोराइड, पोटैशियम सल्फेट, कैल्सियम ऐसीटेट, मैग्नीशियम सल्फेट, पोटैशियम हाइड्रोजन फास्फेट, प्रत्येक की 20 मिग्रा० मात्रा तथा फेरस सल्फेट की

50 मिग्रा० मात्रा को 70 मिली० आसुत जल में घोलकर पूरा विलयन 100 मिली० कर लिया गया।

4. 36% फार्मेल्हिाइड।

अब 1 लीटर फ्लास्क में 100 मिली० अमोनियम मालिब्डेट, 200 मिली० डाइअमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट तथा 100 मिली० खनिज विलयन लेकर 100 मिग्रा० फार्मेल्डिहाइड मिलाकर आयतन 500 मिल० बना लिया गया। अनुपात के अनुसार इसे हम 1 : 2 : 1 : 1 निश्रण कहेंगे। इस मिश्रण को हिलाकर रूई की डाट लगा कर 6 दिनों तक सूर्य प्रकाश में अनुप्रभावित किया गया। प्रतिदिन 4 घंटे तक अनुप्रभावन हुआ। बाद में मिश्रण को छानकर, अवशेष को सुखाकर तौल लिया गया। भार 3.6 ग्राम आया।

प्रकाशअपघटनी मिश्रण की तैयारी

छह परखनलियों में प्रत्येक में सुखाये गये कण की 20 मिग्रा० मात्रा ली गई। इन नलियों में खनिज विलयन तथा आसुत जल की पृथक-पृथक मात्राएँ (देखें सारणी) मिलाई गईं किन्तु प्रत्येक परख-नली में मिश्रण का कुल आयतन 20 मिली० रखा गया।

परखनली संख्या	मिली० खनिज विलयन	मिली० आसुत जल
1.	0.0	20.0
2.	0.5	19.5
3.	1.0	19.0
4.	2.0	18.0
5.	3.0	17.0
6.	4.0	16.0

बुदबुद गणना विधि :

छहों परखनलियों कौ हिलाकर कणों को नीचे बैठने दिया गया। 10 मिनट के बाद परखनलियाँ सूर्य प्रकाश में रख दी गईं और 10-15 मिनट बाद गैस निकलने का प्रेक्षण किया गया। इस प्रकार पहला प्रेक्षण अनुप्रभावन के 15 मिनट बाद किया गया। इस तरह प्रतिमिनट निकलने वाले बुलबुलों की संख्या ज्ञात करली गई। केवल वे बुदबुदे गिने गये जिनके व्यास 1.00 मिमी० का था, इससे छोटे बुदबुदे छोड़ दिये गये। बुदबुदों की गणना पाँच मिनट तक की गई और प्राप्त परिणामों का सांख्यिकीय विश्लेषण किया गया। इस प्रकार 30-30 मिनट बाद बुदबुदों की गणना चार बार की गई। यह देखा गया है कि 1 घंटे के बाद बुदबुद निकलने की गति घट जाती है और अतएव 1 घंटे के बाद मिश्रण को पुनः नल के जल के नीचे ठंडा करके फिर से सूर्य के प्रकाश में बुदबुदे गिने गये। सारणीबद्ध परिणाम

प्रतिमिनट निकले हुये बुदबुदों की संख्या को बताते हैं। प्रकाश में रखते समय कोई गैस बुदबुदा नहीं निकला।

सारणी 1

20 मिग्रा० कणों को 1 : 2 : 1 : 1 मिश्रण में 20 मिली० आसुत जल के साथ

रखने पर निकलने वाले गैस बुदबुदों की संख्या नियन्त्रण

	अनुप्रभावन, मिनटों में			
दिनों की संख्या	30	60 C/S	30	60
1.	15.6±. 5	14.2±.58	16.6±.50	12.6±.47
2.	19.2±.37	18.0±.31	18.0±.54	15.8±.37
3.	23.6±. 5	19.8±.37	23.2±.37	18.4±.98
4.	27.6±.67	24.0±.70	30.0±.31	21.8±.58
5.	17.4±. 5	14.2±.37	14.8±.37	21.0±.44
6.	9.2±.37	7.0±.44	10.6±.40	7.8±.37
7.	7.8±.73	6.0±.70	7.6±.67	7.2±.37

सारणी 2

पूर्ववत्+19.5 मिली० आसुत जल +0 5 मिल० जैव खनिज विलयन

	अनुप्रभावन, मिनटों में			
दिनों की संख्या	30	60 C/S	30	60
1.	9.6±.50	9.8±.50	13.2±.37	12.8±.06
2.	16.8±.37	16.2±.37	15.8±.37	14.4±.50
3.	21.2±.58	17.4±.50	18.2±.37	17.8±.58
4.	24.8±.58	21.6±.50	26.8±.50	19.4±.50
5.	15.8±.37	13.±0.44	11.8±.58	11.2±.58
6.	9.8±.37	6.2±.37	11.8±.66	8.6±.67
7.	7.6±.67	2.0±.37	8.6±.50	8.0±.70

सारणी 3

उपयुक्त मिश्रण +19.0 मिली० आसुत जल +10 मिली० जैव खनिज विलयन

	अनुप्रभावन, मिनटों में			
दिनों की संख्या	30	60	C/S 30	60
1.	16.8±.37	15.6±.50	18.2±.58	14.0±.31
2.	21.6±.50	20.2±.37	19.2±.37	17.4±.50
3.	26.2±.37	22.6±.50	25.4±.50	21.0±.70
4.	32.0±.22	26.0±.31	32.4±.50	25.0±.44
5.	19.8±.58	16.2±.37	17.0±.70	16.0±.54
6.	13.2±.58	11.0±.31	15.8±.86	11.4±.50
7.	11.6±.50	10.6±.50	12.2±.58	11.0±.44

सारणी 4

उपर्युक्त +18 मिली० आसुत जल +2 मिली० जैव समिश्र विलयन

	अनुप्रभावन, मिनटों में			
दिनों की संख्या	30	60	C/S 30	60
1.	12.0±.44	11.6±.67	13.2±.37	12.4±.50
2.	20.0±.18	15.8±.37	15.0±.70	12.4±.50
3.	21.6±.50	16.4±.36	18.0±.44	15.6±.50
4.	21.8±.58	17.4±.74	22.0±.70	17.2±.50
5.	12.4±.50	9.0±.70	11.0±.54	9.2±.58
6.	7.8±.37	6.8±.58	9.0±.54	9.0±.83
7.	7.6±.67	6.2±.37	8.0±.50	6.4±.50

सारणी 5

उपर्युक्त +17 मिली० आसुत जल +3 मिली० जैव खनिज विलयन

	अनुप्रभावन, मिनटों में			
दिनों की संख्या	30	60	C/S 30	60
1.	10.0±.89	9.4±.77	12.2±.37	10.6±.50
2.	15.8±.58	14.0±.31	12.6±.50	12.4±.50
3.	18.8±.37	13.6±.50	12.4±.67	10.4±.50
4.	12.2±.58	15.2±.73	19.4±.67	11.8±.58
5.	10.0±.70	7.4±.50	7.6±.50	6.6±.67
6.	7.0±.31	5.2±.37	8.8±.66	4.8±.37
7.	4.6±.50	5.6±.81	6.2±.52	4.2±.66

सारणी 6

उपर्युक्त +16 मिली० आसुत जल +4 मिली० जैव खनिज विलयन

				अनुप्रभावन, मिनटों में	
दिनों की संख्या	30	60	C/S	30	60
1.	9.0±.70	8.4±.50		9.0±.44	9.2±.37
2.	13.2±.37	11.6±.50		8.8±.58	9.6±.50
3.	15.6±.24	10.3±.31		11.2±.58	8.0±.70
4.	13.2±.73	10·8±.37		13.8±.37	9.6±.50
5.	6.8±.37	5.6±.50		6.2±·86	6.4±.50
6.	5.2±.37	2.2±.68		6.6±.92	2.2±.66
7.	3.6±6.7	2.0±.31		6.2±.56	2·4±.92

C/S प्रकाश अपघटन मिश्रण को ठंडा करने तथा हिलाने को सूचित करता है।

परिणाम तथा विवेचना

उपर्युक्त परिणामों से स्पष्ट है कि 24 घंटे के सूर्य प्रकाश में अनुप्रभावन के बाद प्रयुक्त मिश्रण में जीवाणु द्वारा जल विखण्डन होता है। खनिज विलयन मिलाने से जीवाणु द्वारा जल का प्रकाश अपघटनी विखण्डन बढ़ता है। जिस मिश्रण में 19 मिली० जल के साथ 1 मिली० एवं खनिज विलयन रहता है उसमें से सर्वाधिक गैस निकलती है। गैस का निकलना 4 दिनों तक बढ़ता जाता है और चौथे दिन की अधिकतम गैस निकलती है किन्तु इसके बाद गैस निकलनी कम हो जाती है और सात दिनों के बाद कोई गैस नहीं निकलती। यदि खनिज की सान्द्रता बढ़ा दी जाय तो जल विखण्डन क्षमता घटती है अतएव अपघटनी जल विखण्डन के लिये 19:1 जल-खनिज विलयन अनुपात उपयुक्त है।

निर्देश

1. हाल तथा ईवान्स, नेचर 1969, **223**, 1342.
2. राव, एडम्स, मारिस, हाल, रंगनायकी तथा बहादुर, Abst. Presented at the Biological Applications of Solar Energy Symp. at Madurai, India. PROC. BASE 1980, A. Gonanom, S. Krishnamurthy and J. S. Kahn (Eds.) The MacMillan Co. of India, Madras, India, pp. 201-204.
3. बहादुर तथा रंगनायकी, J. Brit. Interplanetary Sol.1970, **23**, (12), 813-829.
4. बहादुर, के०, Zbl. Bakt. 1975, **13** (**2**), 211-218.

5. रंगनायकी, श्रीवास्तव तथा बहादुर, Proc. Natl. Acad. Sci. India, 1977, **47A** (3), 182-88.

6. बहादुर, के०, Zbl. Bakt., 1964, **118** (2), 671.

7. वही, Zbl. Bakt., 1967, **121**, (2) 291-319.

8. राव, मारिस तथा हाल, Presented at the workshop meeting on "Hydrogenase-Their Catalytic Activity, Structure and Function" Held at Gottingen, Aug. 1978.

9. बहादुर, रंगनायकी, फाल्सोम तथा स्मिथ, Article Presented at Natl. Acad. Sci. India, Symp. Golden Jubilee Commemoration Volume, 1980, pp. 181-198.

10. स्मिथ, फाल्सोम तथा बहादुर, के०, Experientia, 1981, 37, 357 (Birkenser Verlag Basal, Schweiz).

11. बहादुर, रंगनायकी तथा विनोद गुप्ता, Proc. Natl. Acad. Sci. India, 1981, **51** (A), II.

12. बहादुर, रंगनायकी, भट्टाचार्य, अग्रवाल, शाह तथा सिंह, एस० जे०, Proc. Natl. Acad. Sci. India, in Proceeding of Renewable Sources of Energy, 1980, pp. 121-130.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 28, No. 2, 1985

फूरिये श्रेणी की एकसमान मैट्रिक्स संकलनीयता

एल० एम० त्रिपाठी तथा एस० नारायण
गणित विभाग, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त—अप्रैल 14, 1984]

सारांश

इस शोधपत्र में हमने फूरिये श्रेणी की एकसमान मैट्रिक्स संकलनीयता के बारे में एक रोचक परिणाम प्राप्त किया है जो पती[4] द्वारा प्राप्त फूरिये श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता से अधिक व्यापक है।

Abstract

On uniform matrix summability of a Fourier series. *By* L. M. Tripathi and S. Narain, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

In this paper we have obtained an interesting result on uniform summability of Fourier series which is more general than the result of Norlund summability of Fourier series by Pati (1961).

1. माना कि $f \in (-\pi, \pi)$ 2π आवर्त का एक आवर्ती फलन है तथा माना कि

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{1.1}$$

फलन f की फूरिये श्रेणी है। और भी

$$\phi(t) = \phi(x, t) = f(x+t) + f(x-t) - 2s,$$
जहाँ s, अचर है

$$\Phi(t) = \int_0^t |\phi(u)|\, du.$$

रखें। सक्सेना[1,2] ने हरात्मक माध्य तथा नारलुंड माध्य द्वारा फूरिये श्रेणी के एकसमान संकलनीयता की अवधारणा का उपयोग किया है।

माना $T=(a_{n,k})$, एक अनन्त त्रिभुजाकार मैट्रिक्स है जो सिल्वरमैन-टीपलिट्ज[3] के नियमितता प्रतिबन्ध को सन्तुष्ट करता है अर्थात्

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \to 1, \text{ जब } n \to \infty,$$

$$a_{n,k}=0, \; k>n$$

तथा

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{n,k}| \leqslant M, \text{ एक परिमित अचर,}$$

रखेंगे।

अब हम

$$A_{n,v}=\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \text{ तथा } \tau=[1/t]=1/t \text{ का पूर्णसांख्यिक भाग}$$

माना $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x)$ इस प्रकार की अनन्त श्रेणी है कि

$$U_k(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots u_k(x). \tag{1.2}$$

यदि फलन $U=U(x)$ का अस्तित्व हो ताकि

$$\sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \{U_k(x)-U\}=0(1)$$

समुच्चय E में एकसमानतः हो . जिसमें $U=U(x)$ परिबद्ध है तब हम कहते हैं कि श्रेणी $\Sigma \; u_m(x) \; E$ में योग U तक एकसमानतः T-संकलनीय है।

2. पती[4] ने फूरिये श्रेणी की नारलुण्ड संकलनीयता के लिये निम्नलिखित प्रमेय को स्थापित किया है।

प्रमेय

यदि (N, p_n) वास्तविक अऋणात्मक, एकदिष्ट अबर्द्धमान $\{p_n\}$ गुणांकों वाली अनुक्रम नियमित नारलुंड विधि हो जबकि $P_n \to \infty$ जब $n \to \infty$ तथा

$$\log n=O(P_n), \text{ जब } n \to \infty.$$

तब, यदि

$$\Phi(t)=\int_0^t |\phi(u)| \, du=0\left[\frac{t}{p_\tau}\right], \text{ जब } t \to +0,$$

फूरिये श्रेणी (1.1) बिन्दु $t=x$ पर $f(x)$ को (N, p_n) संकलनीय है।

इस शोधपत्र का उद्देश्य निम्नलिखित प्रमेय के रूप में उपर्युक्त परिणाम को संशोधित करके फूरिये श्रेणी की एकसमान मैट्रिक्स संकलनीयता के रूप में विस्तार देना है।

प्रमेय

माना $T=(a_{n,k})$ कोई त्रिभुजीय अनन्त मैट्रिक्स इस प्रकार का है कि अवयव $(a_{n,k})$ अऋणात्मक तथा k के साथ अह्रासमान है तथा

$$\int_{1/\delta}^{n} \frac{A_{n,u}}{u}\, du=O\,(1). \tag{2.1}$$

यदि

$$\Phi\,(t)=0\left[\frac{\beta(1/t)\,.\,t}{\alpha(p_\tau)}\right] \tag{2.2}$$

किसी E में एकसमानतः हो जिसमें $S=(Sx)$ परिवद्ध है जब $t\to+0$, $\beta\,(t)$ तथा $\alpha\,(t)$ के इस प्रकार फलन हैं कि $\beta\,(t)$, $\alpha\,(t)$ तथा $\frac{\beta\,(t)t}{\alpha\,(t)}$ t के साथ एकदिष्टतः वर्द्धमान हैं तथा

$$\beta(n)\log n=O\,(\alpha(P_n)),\ \text{जब}\ n\to\infty \tag{2.3}$$

E में एकसमानतः हो तब फूरिये श्रेणी (1.1) E में S को एकसमानतः (T) संकलनीय है।

इस प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी ।

प्रमेयिका

$(a_{n,k})$ पर अपने प्रमेय के प्रतिबन्ध के अन्तर्गत

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sin\,(k+\frac{1}{2})\,t}{\sin\,t/2}\right|<K\frac{A_{n,\tau}}{t} \tag{2.4}$$

K एक परिमित अचर है, जो $1/n\leqslant t\leqslant\delta<\pi$ में अपनी प्रत्येक उपस्थिति में एक ही नहीं है।

उपपत्ति

यह भली-भाँति ज्ञात है कि $1/n\leqslant t\leqslant\delta<\pi$ में

$$\sin\,i/2<t.$$

अब $t>0$, तथा $\tau\leqslant n$, के लिये हम पाते हैं कि

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sin\,(k+\frac{1}{2})\,t}{\sin\,t/2}\right|\leqslant-\frac{1}{\sin\,t/2}\left[\left|\sum_{k=0}^{\tau} a_{n,k}\sin\,(k+\tfrac{1}{2})\,t\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{k=\tau+1}^{n} a_{n,k}\sin\,(\mathrm{k}+\tfrac{1}{2})\,t\right|\right]$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin t/2}\left[\sum_{k=0}^{\tau} a_{n,k}\left|\sin(k+\tfrac{1}{2})t\right| + A_{n,\tau}\max_{\tau\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{k=\tau+1}^{n}\sin(k+\tfrac{1}{2})t\right|\right] < \frac{A_{n,\tau}}{t}.$$

प्रमेय की उपपत्ति

सक्सेना[2] (p. 506) के अनुसार हम पाते हैं कि

$$S_k(x)-S=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\phi(t)\,\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\,dt+0(1)$$

E में एकसमानतः है अतः $\{S_k(x)-S\}$ के मैट्रिक्स रूपान्तर के लिये

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\phi(t)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\,dt+0(1)$$

E, में एकसमानतः

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}\right)\phi(t)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})}{\sin t/2}\,dt+0(1)$$

E, में एकसमानतः

$=I_1+I_2+0(1)$, माना (3.1)

अब

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{1/n}\phi(t)\sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{\sin t/2}\,dt,$$

E, में एकसमानतः

$|I_1|=O(n)\int_0^{1/n}|\phi(t)|\,dt$ E में एकसमानतः

$=O(n)\,.\,0\left[\frac{\beta(n)}{n\,\alpha(P_n)}\right]$, (2.2) द्वारा E में एकसमानतः

$=0\left[n\,.\,1/n\,.\,\frac{\beta(n)}{\alpha(P_n)}\right]$

$=0\left[\frac{\beta(n)}{\alpha(P_n)}\right]$

$=0\left[\frac{1}{\log n}\right]$ (2.3) द्वारा E में एकसमानतः (3.2)

$=0(1)$, जब $n \to \infty$, E में एक समानतः

$$|I_2| = O(1) \int_{1/n}^{\delta} |\phi(t)| \frac{A_{n,\tau}}{t} dt, \text{ (2.4) द्वारा } E \text{ में एकसमानतः}$$

$$= O(1) \left\{ \left[\frac{A_{n,\tau}}{t} \Phi(t) \right]_{n1/n}^{\delta} - \int_{1,n}^{\delta} \Phi(t) d\left(\frac{A_{n,\tau}}{t} \right) \right\}$$

$$= 0(1) + O(1) \int_{1,n}^{\delta} 0 \left[\frac{\beta(1/t)t}{\alpha(P_\tau)} \right] \left| \frac{d}{dt} \frac{(A_{n,\tau})}{t} \right| dt$$

$$= 0(1) + 0 \left(\int_{1/n}^{\delta} \frac{\beta(1/t)t}{\alpha(P_\tau)} \frac{A_{n,\tau}}{t^2} dt \right)$$

$$= 0(1) + 0 \left(\int_{1/\delta}^{n} \frac{\beta(u)}{u\, \alpha(P_u)} A_{n,u}\, du \right)$$

$$= 0(1) + 0 \left[\left(\frac{\beta(n)}{\alpha(P_n)} \right) \times \int_{1/\delta}^{n} \frac{A_{n,u}}{u} du \right]$$

प्रमेय की परिकल्पना के अनुसार $\beta(t)$, $\alpha(t)$ तथा $\frac{\beta(t)t}{\alpha(t)}$ t के साथ एकदिष्टतः वर्द्धमान है इसलिये

$$|I_2| = 0(1) + 0 \left[\left(\frac{\beta(n)}{\alpha(P_n)} \right) \times \int_{1/\delta}^{n} \frac{A_{n,u}}{u} du \right]$$

$$= 0(1) + 0 \left[\frac{1}{\log n} \times \int_{1/\delta}^{n} \frac{A_{n,u}}{u} du \right]$$

$=0(1)+0(1)$, जब $n \to \infty$, (2.1) तथा (2.3) द्वारा

$=(1)$, E में एकसमानतः (3.3)

(3.1), (3.2) तथा (3.3) को एकत्र करने पर प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हो जाती है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकों में एक (एस० नारायण) यू० जी० सी० नई दिल्ली (भारत) के प्रति जिसने जूनियर रिसर्च फेलोशिफ के रूप में इस शोधकार्य के लिये आर्थिक सहायता दी है आभार प्रकट करता है।

निर्देश

1. सक्सेना, ए०, Proc. Nat. Inst. Sci. India Part, 1965, A **31**, 303-310·

2. वही, 1966, **32**, 502-508.

3. टिपलिट्ज, ओ०, Uberallgeneine Linear Mittebildungen P. M. F., 1913, **22**, 113-119.

4. पती, टी०, Indian Journal of Maths, 1961, **3**, 85-90·

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1984

तीन चरों वाले H-फलन का गणन संख्या श्रेणी प्रसार

आर० एन० पाण्डेय, एस० के० पाण्डेय तथा राजेश पाण्डेय

सम्प्रयुक्त गणित विभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी,

बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त—अक्टूबर, 30 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में तीनों चरों वाले H-फलन तथा परिवर्धित H-फलन के गणन संख्या श्रेणी प्रसार प्राप्त किये गये हैं। यह ध्यान देने की बात है कि इन प्रसारों से तीन चरों वाले लारिसेला के चौदह हाइपरज्यामितीय फलन तथा धवन एवं अन्यों के अतिरिक्त फलनों का एकीकरण हो जाता है।

Abstract

Power series expansions of H-function of three variables. *By* R. N. Pandy, S. K. Pandey and Rajesh Pandey, Applied Mathematics Section, School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In this paper, power series expansions of H-function and modified H-function of three variables are obtained. It is interesting to note that the power series expansions unify the Lauricella's fourtee nhypergeometric functions of three variables and the additional functions due to Dhavan and others

1. प्रस्तावना

एक चर वाली हाइपरज्यामितीय श्रेणी की महान सफलता ने एक या दो चरों वाले संगत सिद्धान्त में प्रगति के लिये प्रेरणा प्रदान की है। 1893 ई० में लारिसेला[4] ने तीन चरों में चौदह हाइपरज्यामितीय श्रेणियों की खोज की और उनके अभिसरण के लिए प्रतिबन्ध प्राप्त किया।

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य तीन चरों वाले H-फलनों तथा तीन चरों वाले परिवर्धित H-फलनों के लिये गणन संख्या श्रेणी प्रसार प्राप्त करना है। ये चर प्राचलों के विशिष्टीकरण से कई त्रिगुण हाइपर-ज्यामितीय श्रेणियाँ प्रदान करते हैं जिनमें लारिसेला की चौदह हाइपज्यामितीय श्रेणियाँ तथा धवन एवं अन्यों के अतिरिक्त फलन सम्मिलित हैं।

2. परिभाषा तथा संकेतन

सम्पूर्ण शोधपत्र संक्षेपण $a_{[i_1,i_2)}1\leqslant i_1>i_2\leqslant 3$ से अनुक्रम $\{a_{l_1}\}$, $\{a_{l_1}, a_{l_2}\}$, $l_1, l_2, \epsilon(1, 2, 3)$ को सूचित किया गया है। पुनश्च, अनुक्रम

(i) $\{a_{l_1}\}$से प्राचल a_1, a_2, a_9 तथा

(ii) $\{a_{l_1}, a_{l_2}\}$ से प्राचल $a_{1,2}$; $a_{1,3}$; $a_{2,2}$ सूचित होता है।

उपर्युक्त संकेतनों को स्पष्ट करने के लिये हम निम्नलिखित उदाहरण लेते हैं

$$\prod_{j=1}^{M[i_1,i_2]} \prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}} \Gamma(a_j^{[t_1,i_2]}+\sum_{1\leqslant k\leqslant 3} s_k A_j^{[i_1,i_2]})=J_1J_2J_3, \tag{2.1}$$

जहाँ

$$J_1=\prod_{j=1}^{M\{i_1\}} \prod_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant 3\\ i_1\neq k}} \Gamma(a_j^{\{i_1\}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant 3} s_k A_j^{\{i_1\}}) \tag{2.2}$$

$$=\prod_{j=1}^{M(1)} \Gamma(a_j^{(1)}+A_{j,2}^{(1)} s_1+A_{j,3}^{(1)} s_3) \prod_{j=1}^{M(2)} \Gamma(a_j^{(2)}+A_{j,1}^{(2)} s_1$$

$$+A_{j,3}^{(2)} s_3) \prod_{j=1}^{M(3)} \Gamma(a_j^{(3)}+A_{j,1}^{(3)} s_1+A_{j,2}^{(3)} s_3)$$

$$J_2=\prod_{j=1}^{M\{i_1,i_2\}} \prod_{\substack{1\leqslant i_2<i_2\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}} \Gamma(a_j^{\{i_1,i_2\}}+\sum_{1\leqslant k\leqslant 3} s_k A_{j,k}^{\{i_1,i_3\}}) \tag{2.3}$$

$$=\prod_{j=1}^{M(1,2)} \Gamma(a_j^{(1,2)}+A_{j,3}^{(1,2)} s_3) \prod_{j=1}^{M(1,3)} + A_j^{(1,3)} s_2)$$

$$\prod_{j=1}^{M(2,3)} \Gamma(a_j^{(2,3)}+A_{j,1}^{(2,3)} s_1).$$

तीन संकुल चरों वाले H-फलन को एम त्रिपाठी तथा पाण्डेय[5] के पैटर्न पर निम्नवत् परिभाषित करते हैं

$$H_{p,q::\{(P^*,Q^*)\}:[(m^*_k,n^*_k)]}^{m,n::\{(M^*,N^*)\}:[(m_k,n_k)]}\left[\begin{matrix}x_1\\x_2\\x_3\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(a_p;(A_p^{(k)}))::\{(a_{P^*}^{[i_1,i_2]},A_{P^*}^{[i_1,i_2]}\\ \\ (b_q;(B_q^k))::\{(b_{Q^*}^{[i_1,i_2]},B_{Q^*}^{[i_1,i_2]})\}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} :((c_{m_k}^{(k)},C_{m_k}^{(k)});((d_{n_k}^{(k)},D_{n_k}^{(k)})) \\ :((e_{m^*_k}^{(k)},E_{m^*_k}^{(k)});((f_{n^*_k}^{(k)},F_{n^*_k}^{(k)})) \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3}\phi\,(s_1,s_2s_3)\,\psi\,[s_{i_1},s_{i_2}]\prod_{k=1}^{3}\phi_k^*\,(s_k)(x_k)^{s_k}\,ds_k \tag{2.4}$$

जिसके साथ

$$\phi\,(s_1,s_2,s_3)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\sum_{k-1}^{3}s_k\,A_j^{(k)})\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-b_j-\sum_{k=1}^{3}s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p}\Gamma(1-a_j-\sum_{k=1}^{3}s_k\,A_j^{(k)})\prod_{j=n+1}^{q}\Gamma(b_j+\sum_{k=1}^{3}s_k\,B_j^{(k)})}$$

$$\psi\,(s_{i_1},s_{i_2})=\frac{\prod_{j=1}^{M^*}\prod_{\substack{1\leqslant i_1<l_2\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}}\Gamma(a_j^{[i_1,i_2]}+\sum_{l\leqslant k\leqslant 3}s_k\,A_{j,k}^{[i_1,i_2]})}{\prod_{j=1}^{P^*}\prod_{\substack{1\leqslant i_1<i_l\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}}\Gamma(1-a_j^{[i_1,i_2]}-\sum_{1\leqslant k\leqslant 3}s_k\,A_{j,k}^{[i_1,i_2]})}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{N^*}\prod_{\substack{1\leqslant i_1\leqslant i_2<3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}}\Gamma(1-b_j^{[i_1,i_2]}-\sum_{1\leqslant k\geqslant 3}s_k\,B_{j,k}^{[i_1,i_2]})}{\prod_{j=N^*+1}^{Q^*}\prod_{\substack{1\leqslant i_1<l_2\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}}\Gamma(b_j^{[i_1,i_2]}-\sum_{1\leqslant k\leqslant 3}s_k\,B_{j,k}^{[i_1,i_2]})} \tag{2.6}$$

$$\phi^*{}_k(s_k)=\frac{\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma(c_j^{(k)}+C_j^{(k)}s_k)\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma(d_j^{(k)}-D_j^{(k)}\,s_k)}{\prod_{j=1}^{m_k^*}\Gamma(e_j^{(k)}+E_j^{(k)}s_k)\prod_{j=1}^{n_k^*}\Gamma(f_j^{(k)}-F_j^{(k)}\,s_k)} \tag{2.7}$$

जिसमें

(i) धन पूर्णांक $m, n, p, q, m_k, n_k, m^*{}_k, n^*{}_k, M^*, N^*, P^*, Q^*$ इत्यादि असमिकाओं

$O\leqslant m\leqslant p; O\leqslant n\leqslant q; O\leqslant M^*\leqslant P^*, O\leqslant N^*\leqslant Q^*$ इत्यादि

द्वारा प्रतिबन्धित होते हैं।

(ii) M^* से $M[i_1, i_2]$ सूचित होता है जो अनुक्रमों के समुच्चय $M\{i_1\}$, $M\{i_1, i_2\}$, $1 > i_1 < i_2 \leqslant 3$ N^*, P^* तथा Q^* के लिये इसी प्रकार की विवेचनाओं सहित प्रदर्शित करते हैं।

(iii) $((c_{m_k}^{(k)}, C_{m_k}^{(k)}))$ संक्षिप्त रूप है $(c_{m_1}^{(1)}, C_{m_1}^{(1)}), (C_{m_2}^{(2)}, C_{m_2}^{(2)}), (C_{m_3}^{(3)}, C_{m_3}^{(3)})$ का। यह विन्यास-रिक्त होता है यदि $m_k = 0$, $\forall k \epsilon (1, 2, 3)$, $((d_{m_k}, D_{m_k}))$ के लिये इसी प्रकार की विवेचनाओं सहित।

(iv) s_1, s_2, s_3 के गुणांक धन वास्तविक या सम्मिश्र संख्यायें हैं (हम केवल वास्तविक संख्या पर विचार करेंगे), कंटूर L_k सम्मिश्र s_k-तल पर मेलिन-बार्नीज प्रकार का है। ये कंटूर समाकल्य की किसी विचित्रता को काटते नहीं।

हम केवल घातांकी अभिसरण तक ही अपने को सीमित रखना चाहते हैं अतएव $\Gamma(w + i\xi)$ में $|\xi|$ तथा $|w|$ की विभिन्न घातों को एक साथ संकेत E के साथ रख दिया गया है जिससे

$$|\Gamma(w + i\xi)| \sim E \exp(-\pi/2|\xi|) \text{ ज्यों-ज्यों } |\xi| \to \infty$$

जहाँ E कोई फलन है ξ का।

उपर्युक्त दृष्टि से हमने देख लिया कि (2.4) द्वारा परिभाषित H-फलन वैश्लेषिक फलन है जो

$$|\arg(x_k)| < \tfrac{1}{2}\pi\mu_k, \tag{2.8}$$

सेक्टरों के अन्तर्गत है, जहाँ पर मान लिया जाता है कि $x_k \neq 0$, $\forall k \epsilon (1, 2, 3)$ तथा

$$\begin{aligned}
0 < \mu_k = & \sum_{j=1}^{m} A_j^{(k)} - \sum_{j=m+1}^{p} A_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(k)} - \sum_{j=n+1}^{q} B_j^{(k)} \\
& + \sum_{j=1}^{M^*} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k, \forall l \epsilon (1,2)}} A_{j,k}^{[i_1, i_2]} - \sum_{j=1+M^*}^{P^*} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k, \forall l \epsilon (1,2)}} A_{j,k}^{[i_1, i_2]} \\
& + \sum_{j=1}^{N^*} \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k, \forall l \epsilon (1,2)}} B_{j,k}^{[i_1, i_2]} - \sum_{j=N^*+1}^{Q^*} \Gamma_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k, \forall l \epsilon (1,2)}} B_{j,k}^{[i_1, i_2]} \\
& + \sum_{j=1}^{m_k} C_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{m^*_k} E_j^{(k)} + \sum_{j=1}^{n_k} D_j^{(k)} - \sum_{j=1}^{n^*_k} F_j^{(k)}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

3. गणन संख्या श्रेणी प्रसार

तीन अनुभाग में तीन चरों वाले H-फलन का त्रिगुण गणन संख्या श्रेणी प्रसार प्राप्त किया गया है जो तीन चरों वाले लारिसेला के चौदह हाइपरज्यामितीय फलनों को एकीकृत करता है।

जिस फल को यहाँ सिद्ध करना है वह नीचे दिया जा रहा है

प्रमेय

$1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3$ के लिये

$$\mathbf{H}^{m,n\,::\,(\{(M^*,N^*)\},3)}_{p,q\,::\,(\{(P^*,Q^*)\},3)} \left[\begin{array}{c|c} -x_1 & (1-a_p^{[i_1,i_2]};\ (a_p^{(k)}))\ ::\ (1-a_{P^*}^{[i_1,i_2]}, A_{P^*}^{[i_1,i_2]}) \\ -x_2 & \\ -x_3 & (1-b_q^{[i_1,i_2]};\ (b_q^{(k)}))\ ::\ ((1-b_{Q^*}^{[i_1,i_2]}, B_{Q^*}^{[i_1,i_2]});\ (0,1),\ (0,1),\ (0,1)) \end{array} \right]$$

$$= R_1 \sum_{I_1, I_2, I_3=0}^{\infty} R_2 \frac{\prod_{j=1}^{p} [(1-a_j)]_{\sum_{k=1}^{3} A_j^{(k)} I_k}}{\prod_{j=1}^{q} [(1-b_j)]_{\sum_{k=1}^{3} B_j^{(k)} I_k}}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{P^*} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k,\ \forall l \in (1,2)}} [(1-a_j^{[i_1,i_2]})]_{\sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} I_k A_{j,k}^{[i_1,i_2]}}}{\prod_{j=1}^{Q^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} [(1-b_j^{[i_1,i_2]})]_{\sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} I_k B_{j,k}^{[i_1,i_2]}}} \prod_{k=1}^{3} \left\{ \frac{x_k^{I_k}}{I_k!} \right\} \tag{3.1}$$

जहाँ

$$R_1 = \frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(b_j) \prod_{j=1}^{m} \Gamma(1-a_j) \prod_{j=1}^{N^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \Gamma(b_j^{[i_1,i_2]})}{\prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(1-b_j) \prod_{j=m+1}^{p} (a_j) \prod_{j=N^*+1}^{Q^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \Gamma(1-b_j^{[i_1,i_2]})}$$

$$\cdot \frac{\prod_{j=1}^{M^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \Gamma(1-a_j^{[i_1,i_2]})}{\prod_{j=M^*+1}^{P^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \Gamma(a_j^{[i_1,i_2]})}, \tag{3.2}$$

$R_2 = (-1)^K,$

$$K=\sum_{k=1}^{3}\left\{\sum_{j=1}^{n} I_k B_j^{(k)}-\sum_{j=m+1}^{p} I_k A_j^{(k)}\right\}+\sum_{j=1}^{N^*}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}} I_k B_{j,k}^{[i_1,i_2]}$$

$$-\sum_{j=1+M^*}^{P^*}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 3\\ i_l\neq k,\forall l\epsilon(1,2)}} I_k A_{j,k}^{[i_1,i_2]} \qquad (3.3)$$

यहाँ पर (3.1) का वाम पक्ष वैश्लेषिक फलन होता है यदि

$$|\arg(x_k)|<\tfrac{1}{2}\mu^*_k, \qquad (3.4)$$

जहाँ $\mu^*_k=\mu_k+1,\ \forall k\epsilon(1,2,3)$.

उपपत्ति

अब निम्नलिखित समाकल पर विचार करें जिसमें तीन चरों वाला H-फलन निहित है

$$M=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\prod_{k=1}^{3} x_k^{\lambda_k}\right)\exp\left(-\sum_{k=1}^{3} a_k x_k\right) H_{p,q\,:\,;\{(P^*,Q^*)\}}^{m,n\,:\,:\{(M^*,N^*)\}}\left[\begin{array}{c|c} x_1 & (a_p;(A_p^{(k)}))::(a_{P^*}^{[i_1,i_2]},A_{P^*}^{[i_1,i_2]}) \\ x_2 & \\ x_3 & (b_q;(B_Q^{(k)}))::(b_{Q^*}^{[i_1,i_2]},B_{Q^*}^{[i_1,i_2]})\end{array}\right] dx_1\,dx_2\,dx_3. \qquad (3.5)$$

समाकल (3.5) का मान ज्ञात किया जा सकता है यदि हम सर्वप्रथम तीन चरों वाले H-फलन के स्थान पर मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल रखें, समाकलन का क्रम बदल दें, सबसे भीतरी x_1, x_2 तथा x_3 समाकलों का मान ज्ञात करें और तब इस तरह प्राप्त मेलिन-बार्नीज समाकल को तीन चरों वाले H-फलन की व्याख्या निम्नलिखित रूप में करें

$$M=\prod_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{(a_k)^{\lambda_k+1}}\right] \mathbf{H}_{p,q\,:\,:(\{P^*,Q^*)\},3)}^{m,n\,:\,:(\{M^*,N^*)\},3)}\left[\begin{array}{c|c} 1/\alpha_1 & (a_p;(A_p^{(k)}))::((a_{P^*}^{[i_1,i_2]},A_{P^*}^{[i_1,i_2]})),\{-\lambda_k,1\} \\ 1/\alpha_2 & \\ 1/\alpha_3 & (b_q;(B_q^{(k)}))::((b_{Q^*}^{[i_1,i_2]},B_{Q^*}^{[i_1,i_2]}))\end{array}\right]$$

$$=\prod_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{(a_k)^{\lambda_k+1}}\right] \mathbf{H}_{p,q\,:\,:(\{(Q^*,P^*)\},3)}^{n,m\,:\,:(\{(N^*,M^*)\},3)}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1-b_q; (B_q^{(k)})) : : ((1-B_{Q^*}^{[i_1,i_2]}, B_{Q^*}^{[i_1,i_2]})) \\ \\ (1-a_p; (A_p^{(k)})) : : ((1-a_{P^*}^{[i_1,i_2]}, A_{P^*}^{[i_1,i_2]}), \{1+\lambda_k, 1\}) \end{matrix} \tag{3.6}$$

चूंकि (3.5) में आया हुआ H-फलन मेलिन-बार्नीज प्रकार का फलन है अतएव (3.5) में

$$\exp\left(-\sum_{k=1}^{3} \alpha_k x_k\right) = \prod_{k=1}^{3} \sum_{I_k=0}^{\infty} \left[\frac{(-\alpha_k x_k)^{I_k}}{I_k}\right] \tag{3.7}$$

का प्रयोग करने पर M के व्यंजक को निम्नलिखित प्रकार से भी लिखा जा सकता है

$$M = \sum_{I_1, I_2, I_3=0}^{\infty} \frac{\prod_{j-1}^{m} \Gamma(a_j - \sum_{k=1}^{3} A_j^{(k)} (\lambda_k+1) - \sum_{k=0}^{3} A_j^{(k)} I_k)}{\prod_{j=m+1}^{p} \Gamma(1-v_j + \sum_{k=1}^{3} A_j^{(k)} (\lambda_k+1) + \sum_{k=1}^{3} A_j^{(k)} I_k)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-b_j + \sum_{k=1}^{3} B_j^{(k)} (\lambda_k+1) + \sum_{k=1}^{3} B_j^{(k)} I_k)}{\prod_{j=n+1}^{q} \Gamma(b_j - \sum_{k=1}^{3} B_j^{(k)} (\lambda_k+1) - \sum_{\kappa=1}^{3} B_j^{(k)} I_k)}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{M^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \Gamma(a_j^{[i_1,i_2]} - \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} A_{j,k}^{[i_1,i_2]} (\lambda_k+1) - \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} I_k A_{j,k}^{[i_1,i_2]})}{\prod_{j=M^*+1}^{P^*} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k, \forall l \epsilon (1,2)}} \Gamma(1-a_j^{[i_1,i_2]} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} A_{j,k}^{[i_1,i_2]} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} I_k A_{j,k}^{[i_1,i_2]})}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{N^*} \prod_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3} \Gamma(1-b_j^{[i_1,i_2]} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} B_{j,k}^{[i_1,i_2]} (\lambda_k+1) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} I_k B_{j,k}^{[i_1,i_2]})}{\prod_{j=N^*+1}^{Q^*} \prod_{\substack{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3 \\ i_l \neq k, \forall l \epsilon (1,2)}} \Gamma(b_j^{[i_1,i_2]} - \sum_{1 \leqslant k \leqslant 3} B_{j,k}^{[i_1,i_2]} (\lambda_k+1) - \sum_{1 < k < 3} I_k B_{j,k}^{[i_1,i_2]})}$$

$$\prod_{k=1}^{3} \left[\frac{(-a_k)^{I_k}}{I_k\,!}\right] \tag{3.8}$$

(p, m) को (q, n) से तथा (q, n) को (p, m) से a_j को b_j से प्रतिस्थापित करके तथा (3.6) एवं (3.8) में $a_k = -x_k$ एवं $1+\lambda_k=0$, $\forall k \epsilon (1, 2, 3)$ रखने पर हमें वांछितफल (3.1) प्राप्त होता है।

एक उपयोगी निगमन

$1-a_j$ को Q_j से; $1-b_j$ को b_j से; $(1-a_j^{[i_1,i_2]})$ को $(a_j^{[i_1,i_2]})$ से; $(1-b_j^{[i_1,i_2]})$ को $(b_j^{[i_1,i_2]}$ से प्रतिस्थापित करने तथा $n=0$, $m=p$, $M^*=P^*$, $N^*=0$ रखने एवं गामा फलनों तथा कोष्ठकों में आये समस्त रोमन अक्षरों को 1 के तुल्य रखने और तब (2.1) का उपयोग करने पर हमें निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$R_1^* \, \mathbf{H}^{p,0\,:\,:\,\{(P^*,0)\}}_{p,q\,:\,:\,\{(P^*,Q^*),3\}} \left[\begin{array}{c|l} -x_1 & (a_p;\,1,1,1)\,:\,:\,\{(a^{\{i_1\}}_{P\{i_1\}};\,1)\}\,: \\ -x_2 & \\ -x_3 & (b_q;\,1,1,1)\,:\,:\,\{(b^{\{i_1\}}_{Q\{i_1\}};\,1)\}\,: \end{array} \right.$$

$$\{(a^{\{i_1,i_2\}}_{P\{i_1,i_2\}};\,1)\}$$

$$\left. (\{(b^{\{i_1 i_2\}}_{Q\{i_1,i_2\}};\,1)\};\,(0,1),\,(0,1),\,(0,1)) \right]$$

$$= \sum_{I_1,I_2,I_3=0}^{\infty} \frac{\left[\left(a_P\right)\right]_{I_1+I_2+I_3}\left[\left(a^{(3)}_{P(3)}\right)\right]_{I_1+I_2}\left[\left(a^{(2)}_{P(2)}\right)\right]_{I_1+I_3}}{\left[\left(b_Q\right)\right]_{I_1+I_2+I_3}\left[\left(b^{(3)}_{Q(3)}\right)\right]_{I_1+I_2}\left[\left(b^{(2)}_{Q(2)}\right)\right]_{I_1+I_3}}$$

$$\frac{\left[\left(a^{(1)}_{P(1)}\right)\right]_{I_2+I_3}\left[\left(a^{(2,3)}_{P(2,3)}\right)\right]_{I_1}\left[\left(a^{(1,3)}_{P(1,3)}\right)\right]_{I_2}\left[\left(a^{(2,3)}_{P(2,3)}\right)\right]_{I_3}}{\left[\left(b^{(1)}_{Q(1)}\right)\right]_{I_2+I_3}\left[\left(b^{(2,3)}_{Q(2,3)}\right)\right]_{I_1}\left[\left(b^{(1,3)}_{Q(1,3)}\right)\right]_{I_2}\left[\left(b^{(2,3)}_{Q(2,3)}\right)\right]_{I_3}}$$

$$\prod_{k=1}^{3} \left[\frac{(x_k)^{I_k}}{I_k\,!} \right],$$

जहाँ

$$\frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j) \prod_{j=1}^{Q\{i_1\}} \Gamma(b_j^{\{i_1\}}) \prod_{j=1}^{Q\{i_1,i_2\}} \Gamma(b_j^{\{i_1,i_2\}})}{\prod_{j=1}^{q} (a_j) \prod_{j=1}^{P\{i_1\}} \Gamma(a_j^{\{i_1\}}) \prod_{j=1}^{P\{i_1,i_2\}} \Gamma(a_j^{\{i_1,i_2\}})}$$

$\forall i_1, i_2 \epsilon (1, 2, 3)$ तथा $1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3$.

विशिष्ट दशा के रूप में उपर्युक्त परिणाम लारिसेला के चौदह हाइपरज्यामितीय फलनों तथा तीन चरों वाले अतिरिक्त फलनों को एकीकृत करता है।

4. परिवर्द्धित गणन संख्या श्रेणी प्रसार

तीन चरों वाले परिवर्धित H-फलन को ϕ तथा $\psi(S_{i_1}, S_{i_2})$ में S_k का चिन्ह बदल कर विविध रूपों में प्राप्त किया गया है। यहाँ हम परिवर्धित H-फलन के एक गणनसंख्या श्रेणी प्रसार को दे रहे हैं जिसमें ϕ तथा $M_{\{i\}}$, $P_{\{i\}}$, $N_{\{i\}}$ एवं $Q_{\{i\}}(i=1,2)$ के व्यंजकों में आये गामा-फलन में S_3 का मान बदला है। पूर्ववर्ती अनुभाग में हमने संकेतन को जिस रूप में ग्रहण किया है, उसके अनुसार उपर्युक्त के हेतु प्राप्त प्रसार को निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$^{*}\mathbf{H}^{m,n::\{(M^*,N^*)\}}_{p,q::(\{(P^*,Q^*)\},3)}\left[\begin{array}{c|l} -x_1 & (1-a_p;(A_p^{(k)}))::\ \{(1-a_{P^*}^{[i_1,i_2]};A_{P^*}^{[i_1,i_2]})\} \\ -x_2 & \\ -x_3 & (1-b_q;(B_q^{(k)}))::\ (\{(1-b_{Q^*}^{[i_1,i_2]};B_{Q^*}^{[i_1,i_2]})\};(0,1),(0,1),(0,1)) \end{array}\right]$$

$$=R_3\sum_{I_1,I_2,I_3=0}^{\infty}R_4\frac{\prod_{j=1}^{p}\left[\left(1-a_j\right)\right]_{A_j^{(1)}I_1+A_j^{(2)}I_2-A_j\,I_3^{(3)}}}{\prod_{j=1}^{q}\left[\left(1-b_j\right)\right]_{B_j^{(1)}I_1+B_1^{(2)}I_2-B_j^{(3)}I_3}}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{P(3)}\left[\left(1-a_j^{(3)}\right)\right]_{I_1A_{j,1}^{(3)}+I_2A_{j,2}^{(3)}}\prod_{j=1}^{P(2)}\left[\left(1-a_j^{(2)}\right)\right]_{I_1A_{j,1}^{(2)}+I_3A_{j,3}^{(2)}}}{\prod_{j=1}^{Q(3)}\left(\left(1-b_j^{(3)}\right)\right]_{I_1B_{j,1}^{(3)}+I_2B_{j,2}^{(3)}}\prod_{j=1}^{Q(2)}\left[\left(1-b_j^{(2)}\right)\right]_{I_1B_{j,1}^{(2)}+I_3B_{j,3}^{(2)}}}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{P(1)}\left[\left(1-a_j^{(1)}\right)\right]_{I_2A_{j,2}^{(1)}-I_3A_{j,3}^{(1)}}}{\prod_{j=1}^{Q(1)}\left[\left(1-b\right)\right]_{I_2B_{j,2}^{(1)}-I_3B_{j,3}^{(1)}}}\cdot\frac{\left[\left(a_{P(2,3)}^{(2,3)}\right)\right]_{I_1}\left[\left(a_{P(1,3)}^{(1,3)}\right)\right]_{I_2}}{\left[\left(b_{Q(2,3)}^{(2,3)}\right)\right]_{I_1}\left[\left(b_{Q(1,3)}^{(1,3)}\right)\right]_{I_2}}$$

$$\frac{\left[\left(a_{P(1,2)}^{(1,2)}\right)\right]_{I_3}}{\left[\left(b_{Q(1,2)}^{(1,2)}\right)\right]_{I_3}}\cdot\prod_{k=1}^{3}\left[\frac{x_k^{I_k}}{I_k!}\right].$$

जहाँ $R_9 = R_1$ तथा R_4 के व्यंजक को R_2 के पैटर्न पर सरलता से ज्ञात किया जा सकता है ।

विशिष्ट दशा

p, m, n आदि प्राचलों के उपयुक्त विशिष्टीकरण से हमें धवन का फल[1] तथा साहित्य में दिये गये अन्य फल प्राप्त किये जा सकते हैं ।

निर्देश

1. धवन, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका,** 1982, **25**, 311-314.
2. एर्डेल्यी, ए०, मैग्नस, डब्लू०, ओवरहेटिंगर, एफ० तथा ट्राइकोमी, एफ० जी०, Higher Trancendental Functions, भाग I, II, मैकग्राहिल न्यूयार्क, टोरंटो, लन्दन, 1953.
3. फाक्स, सी०, Trans. Amer. Math. Soc. 1961, **98**, 395-429.
4. लासिसेला, जी०, Rend. Circ. Mat .Polarma, 1893, 7, 111-158.
5. त्रिपाठी, यू० के० तथा पाण्डेय, आर० एन०, J. Sci. Res. 1979-80, **XXX** (**2**). 249-276.
6. राइट, आई० एम०, J. London Math. Soc. 1935, **10**; 256, 1940, **29**, 46, 389, 408.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

सल्फामेथिजोल-आयरन और निकेल संकुल

कुमारी शारदा गर्ग तथा एस० एस० गुप्ता
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अगस्त 28, 1984]

सारांश

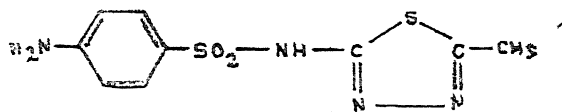
चालकतामूलक अनुमापन, स्पेक्ट्रमी अध्ययन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात होता है कि सल्फर औषधियों में सल्फामेथिजोल, आयरन और निकेल के साथ ऐल्कोहालीय माध्यम में 2 : 1 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (आई० आर०) से भी की गई है।

Abstract

Sulphamethizol-iron and nickel complex. *By* Ku. Sharda Garg and S. S. Gupta, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Sulphamethizole [benzene sulphonamide, 4. amino-N (5 methyl-1, 3, 4. thiadiazole. 2 yl)], a sulpha drug, forms 2 : 1 complexes with iron and nickel in alcoholic solution as indicated by conductometric titrations. spectrophotometric studies and analytical data. Structures assigned are supported by i. r. spectral bands.

सल्फामेथिजोल [I] [बैंजीन सल्फोनामाइड, 4-ऐमीनो-N (5 मेथिल-1, 3, 4 थायाडाइजोल 2 इल)] एक सल्फर औषधि है। संक्रमण धातुयें जैसे-आयरन, कोबाल्ट, सिल्वर, गोल्ड, कॉपर प्राचीन



(I)

समय से ही आयुर्वेदिक, यूनानी तथा ऐलोपैथिक औषधियों में प्रयुक्त होती रही हैं। अपने पूर्ववर्ती शोधकार्य को आगे बढ़ाते हुये[1-3] यहाँ हम सल्फामेथिजोल-आयरन एवं सल्फामेथिजोल निकेल संकुल का वर्णन

कर रहे हैं। कौशल तथा सहयोगियों[4-5] ने कई धातु सल्फोनामाइड संकुल तैयार किये हैं। उनमें से कुछ अपनी मूल औषधियों से अधिक उपयोगी सिद्ध हुये हैं।

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन

(अ) सल्फामेथिजोल (0.01M) तथा फेरस सल्फेट (0.02M) के मानक विलयन परिशुद्ध मेथेनॉल में बनाये गये तथा सल्फामेथिजोल (0.01M) एवं निकेल नाइट्रेट (0.02M) के मानक विलयन परिशुद्ध ऐथेनॉल में बनाये गये। लीगेन्ड के 10 मि० ली० विलयन को 50 मि० ली०

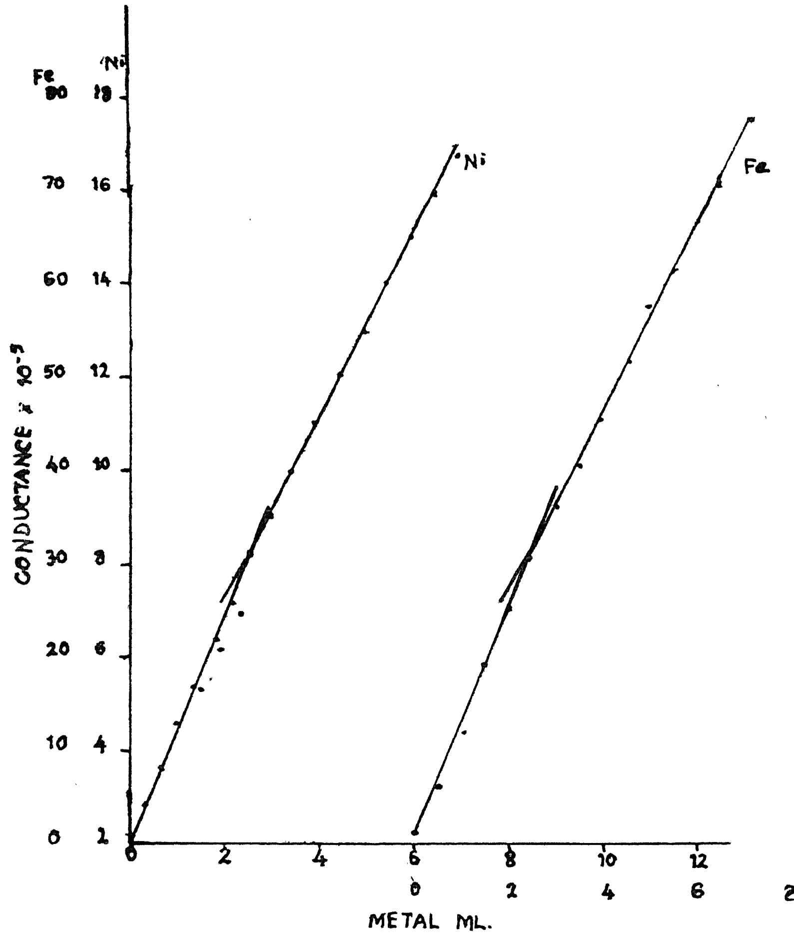


FIG-1

चित्र 1

तक तनु किया गया तथा अनुमापन धातु विलयन के साथ "तोसनीवाल" चालकतामापी द्वारा 28° सें० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच

ग्राफ खींचा गया (चित्र 1)। प्राप्त परिणाम 2 : 1 सल्फामेथिजोल निकेल एवं सल्फामिथाइजील आयरन संकुल की पुष्टि करते हैं।

(ब) स्पेक्ट्रममापी अध्ययन द्वारा वोसवर्ग तथा कूपर[6] का प्रयोग करते हुये भी संकुल की प्रकृति का अध्ययन किया गया है। इसके लिये सल्फामेथिजोल तथा फेरस सल्फेट (0.1 M) के शुद्ध मेथेनॉल में तैयार किये गये समआण्विक विलयन 2:1, 1:1 तथा 1:2 अनुपात के मिश्रण लिये

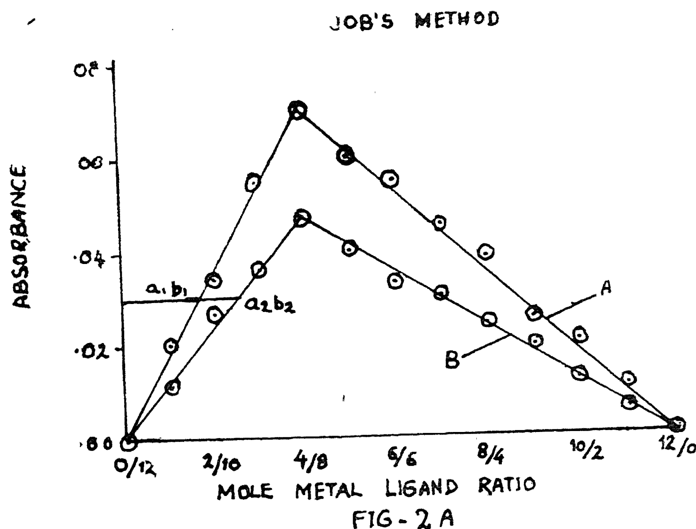


FIG-2 A

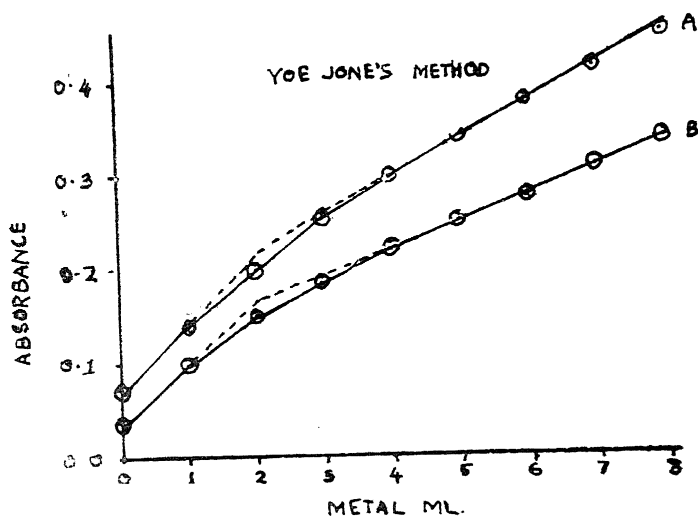


FIG-2 B

चित्र 2

गये तथा अवशोषण ज्ञात किया गया। प्राप्त परिणाम से 2 : 1 अनुपात केवल एक संकुल की पुष्टि होती है (चित्र 2)।

(स) जोब[7] की संतत् विचरण विधि तथा मोल अनुपात विधि[8] द्वारा अवशोषण अध्ययन से केवल 2 : 1 संकुल की पुनः पुष्टि होती है ।

वियोजन तथा विश्लेषण

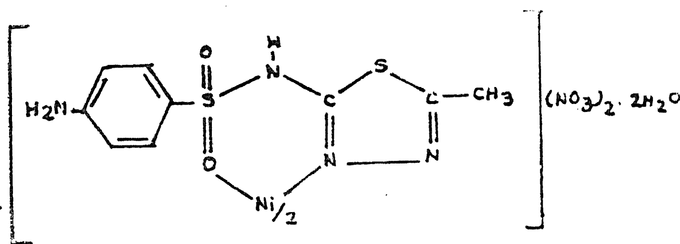
सल्फामेथिजोल–फेरस सल्फेट संकुल : सल्फामेथिजोल (2.5 ग्राम) तथा फेरस सल्फेट (1.3 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध मेथिल-ऐल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया । लीगेन्ड तथा धातु के विलयन को संतत् विलोडन के साथ मिलाया गया तथा एक घंटे तक रिफ्लक्स किया गया । छान कर ऐल्कोहल से धोकर शुद्ध किया गया । संकुल ठोस रूप में प्राप्त नहीं हुआ ।

सल्फामेथिजोल (2.5 ग्राम) तथा निकेल नाइट्रेट (1.35 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध एथिल ऐल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया । लीगेन्ड तथा धातु के विलयन को संतत् विलोडन के साथ मिलाया गया तथा एक घन्टे तक रिफ्लक्स किया गया । छानकर ऐल्कोहल से धोकर शुद्ध किया गया । हल्का नीले रंग का संकुल प्राप्त हुआ । प्राप्ति 1.27 ग्राम, संकुल 245 °C पर विघटित हो जाता है ।

सल्फामेथिजोल निकेल संकुल में Ni—8.11, C—28.00, H—3.80, N—14.94 तथा S—16.62% पाये गये जबकि $(C_9H_{10}O_2N_4S_2)_2Ni\,(NO_3)_2.2H_2O$ में सिद्धान्ततः Ni—7.73, C—28.49, H—3.97, N—14.76 तथा S—16.54% प्रतिशत होने चाहिये ।

विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर सल्फामेथिजोल निकेल नाइट्रेट संकुल को संरचना (II) द्वारा निरूपित किया जा सकता है ।



(II)

संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (i.r.) अध्ययन द्वारा भी होती है, जिसमें धातु नाइट्रोजन का अवशोषण बैंड 6.65cm^{-1} पर तथा धातु आक्सीजन का अवशोषण बैंड 6.90cm^{-1} पर प्राप्त होता

है। सल्फामेथिजोल फेरस सल्फेट संकुल का स्थायित्व स्थिरांक जाब एवं योइ जोन्स विधि[8] द्वारा क्रमशः ($\log K = 11.12$, 6.64, 6.74) तथा तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\triangle F = -14.84$, -8.86 तथा -8.99) किलोकैलोरी प्रति मोल ज्ञात किया गया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

शोधकार्य की सुविधायें प्रदान करने के लिये लेखक मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य के आभारी हैं। लेखक में से एक (कु० शारदा गर्ग) जूनियर रिसर्च फेलोशिप के लिये सी० एस० आई० आर० की आभारी है।

निर्देश

1. गर्ग, कु० शारदा, पटेल, वी० एस० तथा गुप्ता, एम० एस०, **जर्न० साइंस रिसर्च**, 1982, **4** (**3**), 135.
2. गर्ग, कु० शारदा, पटेल, वी० एस० तथा गुप्ता, एम० एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1983, **26** (**1**), 73.
3. गर्ग, कु० शारदा, पटेल वी० एस० तथा गुप्ता, एस० एस०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1983, **60**, 289.
4. पांडे, के० के० तथा कोशल, आर०, **इंडियन जर्न० एप्ला० केमि०**, 1969, **32**, 96.
5. चतुर्वेदी, के० के० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०** 1970, **47**, 1135.
6. वोसबर्ग, डब्ल्यू० सी० तथा कूपर, सी० आर०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1941, **63**, 437; 1942, **64**, 1630.
7. जोब, पी०, **एन० कीम०**, 1928, **10**, 113; 1936, 3, 97.
8. योई, जे० एच० तथा जोन्स, एच० एल०, **इंडियन इं० केमि० एनल० एड०**, **1944**, **16**, 111.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

संचार के विभिन्न साधन

काली शंकर

इलेक्ट्रानिक इंजीनियर, इण्डियन स्पेस रिसर्च आर्गनाइजेशन,
नई दिल्ली-21

[प्राप्त—अगस्त 2, 1984]

सारांश

सामाजिक प्राणी होने के कारण आदि काल से ही मनुष्य के अन्दर एक स्थान से दूसरे स्थान को संदेश भेजने की इच्छा प्रबल होती रही है। संचार का आविर्भाव मनुष्य की सामाजिक आवश्यकताओं, व्यक्तिगत टकराव एवं सामूहिक व्यवहार की देन है। सामाजिक तकनीकी तरीके-जैसे भाषण, भाषा एवं लेखन संचार क्रिया के मूल अंग हैं। वास्तव में भाषा सामाजिक ढाँचे का सर्वप्रथम मूल भाग गिना जायेगा क्योंकि इसी के द्वारा ही मनुष्य का सामाजिक अस्तित्व रहता है। यह बात मनुष्यों पर ही नहीं बल्कि पशुओं एवं जीव-जन्तुओं पर भी लागू होती है। प्राणि-विज्ञान शास्त्रियों के अनुसार मधुमक्खियाँ अपने छत्ते के पास पहुँचने पर अपने शरीर में विशेष प्रकार का स्पन्दन पैदाकर के छत्ते के अन्दर बैठी हुई मधुमक्खियों को शहद के प्राप्ति स्थान की सूचना देती हैं। मधुमक्खियों की इस सांकेतिक भाषा को तर्कों एवं प्रयोगों के द्वारा सिद्ध किया जा चुका है। संचार का प्रत्येक मानवीय कार्यकलाप के साथ गहरा सम्बन्ध है। आज के तकनीकी युग में प्रयोग किये जाने वाले प्रमुख संचार यंत्रों—रेडियो, दूरदर्शन, कम्प्यूटर नियंत्रित दूरभाष केन्द्र, प्रतिकृति फेसिमिल प्रेषण यंत्रों इत्यादि ने आधुनिक युग में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाई है।

Abstract

Different means of communication. *By* Kali Shanker, Electronic Engineer, Delhi Earth Station, Indian Space Research Organisation, New Delhi-110021.

Due to social in nature, the man had always a desire of sending message from one place to other. Communication services arise as a response to needs, including personal interaction, collective behaviour, learning and socialization. Social technology speech language and writing are basics to the communication process. Language could, in fact, be described as the basic social technology which

makes social existence possible. This is true not only of man but of animals. According to biological experts, bees make regular wagging movement with their wings when they return to the hive, indicating clearly that they were transmitting information about sources of nectar. This signalling language of bees has been proved by logics and arguments. The process of communication has deep relation with each human action. Various means of communication of today—Radio, Television, computer-controlled Telephone Exchange, Facsimile Transmission systems have played a very significant role.

संचार के विभिन्न साधन

संचार की उपयुक्त सुविधाओं को दूर के लोगों तक पहुँचाने के लिये अनेक प्रकार के संचार साधन प्रयोग किये जाते रहे हैं। जब जन समुदाय के लिये संचार के इन साधनों का इतना महत्व है तो यह अत्यन्त आवश्यक है कि हमें दूर संचार के इन साधनों के विषय में कुछ ज्ञान प्राप्त करें। इसी बात को ध्यान में रखते हुये यहाँ पर दूर संचार के कुछ मुख्य साधनों का वर्णन किया गया है। ये हैं

1. कोएक्सल केबुल संचार
2. माइक्रोवेव संचार
3. क्षोभमंडलीय संचार (ट्रोपोस्कैटर कम्युनिकेशन)
4. उपग्रह संचार प्रणाली
5. रेशा प्रकाशिक संचार (फाइबर आप्टिक्स कम्युनिकेशन)
6. लेजर संचार
7. प्रतिकृति प्रेषण फेसिमिल ट्रान्समिशन

1. कोएक्सल केबुल संचार

संचार माध्यम किसी संचार संस्थान का मुख्य अंग होता है। इसी के द्वारा संदेश सिगनल का प्रेषण होता है। प्रेषण माध्यम पर किसी भी संचार संस्थान के टर्मिनल उपकरणों की डिजाइन निर्भर करती है जिसके अन्तर्गत मल्टीप्लेक्सिग उपकरण, चैनेल की संरचना तथा निष्पादन है। संचार के इन माध्यमों में साधारण तार, बहु-युग्म केबुल, कोएक्सल केबुल और माइक्रोवेव रेडियो शामिल हैं। कोएक्सल केबुल संस्थान में एक विशेष प्रकार के केबुल का प्रयोग किया जाता है जिसमें कवच युक्त अनेक तारों का प्रयोग किया जाता है। कोएक्सल केबुल की खोज 1920 में हुई। उसके बाद से अनेक उच्च क्षमता वाले कोएक्सल केबुल संस्थानों का निर्माण किया गया।

1.1 कोएक्सल केबुल संस्थान का विकास : कोएक्सल केबुल संस्थान ने दूरस्थ स्थानों के बीच संचार स्थापित करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाई है। यद्यपि इसका अनुसंधान 1920 में किया गया, लेकिन पहले पूर्ण विकसित अन्तःमहाद्वीपीय कोएक्सल केबुल संस्थान का निर्माण अमरीका संस्था बेल

टेलीफोन लैबोरेटरीज ने 1941 में किया। इसमें 600 चैनेल की क्षमता थी जो उस समय के अनुसार काफी ज्यादा थी क्योंकि उस समय माइक्रोवेव संचार अधिक प्रचलित नहीं था। पहले कोएक्सल केबुल संस्थान का प्रयोग केवल टेलीफोन सिगनल के प्रेषण एवं अभिग्रहण के लिये किया जाता था लेकिन बाद में इसका प्रयोग टेलीविजन सिगनल के प्रेषण एवं अभिग्रहण के लिये किया जाने लगा। टेलीविजन प्रेषण । अभिग्रहण के पहली बार कोएक्सल केबुल संस्थान का प्रयोग 1945 में किया गया। तत्पश्चात् 1953 में कोएक्सल केबुल के एल-3 संस्थान का विकास हुआ जिसमें 1860 संदेश चैनेल की क्षमता थी। इसके पहले के विकसित एल-1 कोएक्सल केबुल संस्थान की क्षमता 600 संदेश चैनेल की थी। तत्पश्चात् एल-4 कोएक्सल केवुल का विकास किया गया जिसमें 3600 संदेश चैनेल-क्षमता थी। इसी प्रकार कोएक्सल केबुल संस्थान के विकास में लगातार वृद्धि होती गई।

1.2 कोएक्सल केबुल की संरचना : कोएक्सल केबुल में मूल रूप से एक केन्द्रीय तार होता है जो एक बेलनाकार केबुल के बीच में फँसा दिया जाता है। यह केन्द्रीय तार डाइलेक्ट्रिक पदार्थ निर्मित छोटी-छोटी तश्तरियों के द्वारा बेलनाकार केबुल के अन्दर लटकाया जाता है। सामान्यतया इस प्रकार की अनेक बेलनकार केबुलें एक अकेले आवरण के अन्दर लगाई जाती हैं जिससे कोएक्सल केबुल की संदेश चैनेल क्षमता बढ़ती है।

कोएक्सल केबुल का सिगनल ह्रास गुणांक (लास फैक्टर) सामान्य केबुलों की अपेक्षा बहुत कम होता है तथा यह वाह्य विद्युतीय व़ाधाओं (इन्टरफ़ेरेन्स) को भी रोकती है। कोएक्सल केबुल की संरचना चित्र 3 में दिखाई गई है।

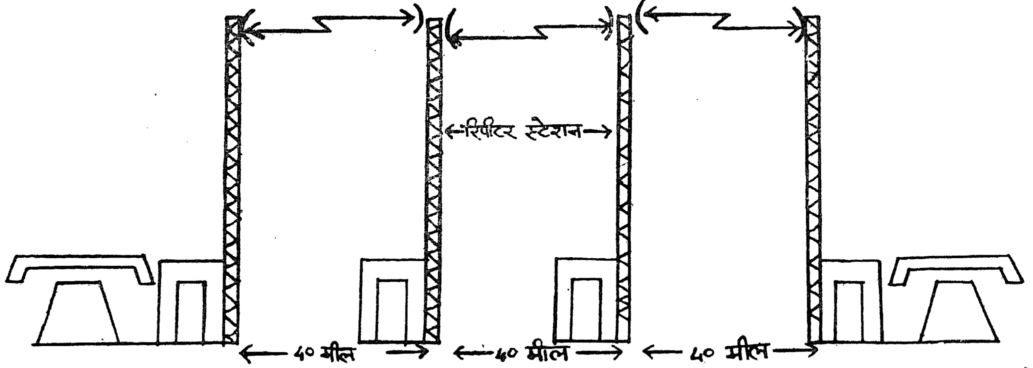
1.3 कोएक्सल केबुल संस्थान : कोएक्सल केबुल संस्थान के अनेक रिपीटर स्टेशनों का प्रयोग होता है। यह रिपीटर स्टेशन प्रेषित सिगनल के स्तर को काफी दूरी में बनाये रखते हैं। ट्रान्जिस्टर एवं अन्य सक्रिय इलेक्ट्रानिकी पुर्जों के आविर्भाव से अब काफी विश्वसनीय रिपीटर स्टेशन का निर्माण होने लगा है। रिपीटर स्टेशनों के अलावा अनेक सहायक स्टेशन भी होते हैं। रिपीटर स्टेशनों के बीच की दूरी कोएक्सल केबुल के ह्रास गुणांक पर निर्भर करती है।

2. माइक्रोवेव संचार संस्थान

विभिन्न उद्योगों में माइक्रोवेव का अर्थ भिन्न है। संचार के क्षेत्र में माइक्रोवेव संस्थान का तात्पर्य उन संचार संस्थानों से हैं जो 960 मेगाहर्त्स या उससे अधिक आवृत्ति में कार्य करते हों। माइक्रोवेव संचार का विकास 1940 के आसपास हुआ। इस संचार के द्वारा काफी लम्बी दूरी में संचार व्यवस्था स्थापित की जा सकती है। इसके द्वारा कई प्रकार के संदेश जैसे वोले हुये शब्द, लिखित शब्द, संगीत, चित्र, आँकड़े, टेलीविजन तथा टेलीफोन सिगनल एक स्थान से हजारों मील की दूरी तक भेजे जाते हैं।

माइक्रोवेव संस्थान की संदेश प्रेषण क्षमता काफी होती है तथा यह संस्थान काफी विश्वसनीय होता है। इसमें बहुत ही कम प्रेषण पावर की आवश्यकता पड़ती है।

2.1 तकनीकी संस्थान : माइक्रोवेव संदेश चित्र 1 में दिखाया गया है । पहले और आखिरी स्टेशन को प्रेषक और अभिग्राहक स्टेशन कहते हैं । बीच के स्टेशनों को रिपीटर स्टेशन कहते हैं । हर एक स्टेशन में दो एन्टेना प्रयोग किये जाते हैं । रिपीटर स्टेशन का एक एन्टेना एक तरफ से तथा दूसरा एन्टेना दूसरी तरफ से संचार स्थापित करता है । इसी एन्टेना के द्वारा माइक्रोवेव ऊर्जा एक स्थान से दूसरे स्थान को भेजी जाती है । ये एन्टेना परवलय आकार के होते हैं । एन्टेना लोहे की ऊँची टावर के ऊपर लगाया जाता है तथा अन्य इलेक्ट्रानिकी उपकरण टावर के नीचे एक कमरे में रखे



चित्र 1 माइक्रोवेव संस्थान

जाते है । जैसा कि चित्र से स्पष्ट है कि प्रत्येक 40 मील की दूरी पर एक टावर का प्रयोग किया जाता है । 40 मील की दूरी रखने का भी एक कारण है । एक एन्टेना से निकली हुई माइक्रोवेव ऊर्जा सीधी रेखा में चलकर दूसरे एन्टेना तक पहुँचती है । अगर दो टावरों के बीच की दूरी 40 मील से ज्यादा कर दी जाय तो माइक्रोवेव तरंगों के सीधे रास्ते के बीच पृथ्वी की गोलाई अवरोध बनकर आ जायेगी और यह माइक्रोवेव तरंगें दूसरे एन्टेना तक नहीं पहुंच पायेंगी ।

3. क्षोभ मंडलीय प्रेषण (ट्रोपोस्कैटर प्रोपैगेशन)

क्षोभमंडलीय प्रेषण लम्बी दूरियों में माइक्रोवेव ऊर्जा के प्रेषण का एक तरीका है । इसमें 1 से 10 कि०वा० तक की ऊर्जा का प्रेषण परवलय आकार के एन्टेना के द्वारा किया जाता है । इन परवलय आकार के एन्टेना का व्यास 15 फुट से लेकर 60 फुट तक होता है । उपग्रह संचार तथा क्षोममंडलीय संचार काफी मिलते-जुलते हैं, अन्तर केवल यह है कि उपग्रह संचार में रिपीटर स्टेशन उपग्रह होता है जो पृथ्वी से प्रेषित माइक्रोवेव ऊर्जा को पृथ्वी की ओर भेजता है जबकि क्षोभमंडलीय संचार तकनीक में पृथ्वी से प्रेषित ऊर्जा का भाग क्षोभ मंडल के द्वारा पृथ्वी की ओर भेजा जाता है ।

3.1 क्षोभ मंडल : क्षोभ मंडल या ट्रोपोस्फियर पृथ्वी के आयन मंडल का वह भाग है जो पृथ्वी से लगभग 11 कि० मी० की ऊंचाई तक फैला होता है । क्षोभ मंडल में विभिन्न गैसों की प्रतिशत उपस्थिति निश्चित रहती है तथा यह ऊंचाई के साथ नहीं बदलती । लेकिन क्षोभ मंडल में विद्यमान

जल वाष्प की मात्रा ऊंचाई के साथ कम होती है। क्षोभ मंडल की सबसे विशेष बात यह है कि इसका तापमान ऊंचाई के साथ कम होता जाता है जिसके कारण क्षोभ मंडल सूर्य की किरणों के लिये पारदर्शक होता है। सौर ऊर्जा का अधिकांश भाग पृथ्वी के द्वारा शोषित किया जाता है। सौर ऊर्जा से गरम पृथ्वी तापीय विकिरण का एक स्रोत बन कर क्षोभ मंडल को ऊपरी दिशा में गरम करती है। इसके अतिरिक्त वायु के संवहन आवागमन भी क्षोभ मंडल को कुछ हद तक गरम करते हैं। इस प्रकार नीचे की हवा गरम होकर ऊपर उठती है जिससे ठंडी हवा गरम हो सके तथा पृथ्वी की सतह के एकसमान गरम न होने से ऊपर जाने वाली तथा नीचे आने वाली वायु धारायें पैदा हो जाती हैं जो वायु प्रक्षोभ (एअर टर्बुलेंस) को जन्म देती हैं।

3.2 क्षोभमंडलीय प्रेषण का सिद्धांत : क्षोभमंडलीय प्रेषण के विषय में कई परिकल्पनायें प्रसिद्ध हैं। एक परिकल्पना के अनुसार उपर्युक्त वायु प्रक्षोभ तथा क्षोभमंडल की अन्य असामान्य प्रक्रियाओं के कारण पृथ्वी से प्रेषित ऊर्जा का कुछ भाग पृथ्वी की ओर परावर्तित हो जाता है। वायु प्रक्षोभ के द्वारा रेडियो ऊर्जा के बिखराव को उसी प्रकार समझा जा सकता है जैसे कि अंधेरी रात में टार्च से निकले हुये प्रकाश का कोहरे के द्वारा बिखराव हो जाता है। एक अन्य परिकल्पना के अनुसार क्षोभमंडल अनेक पर्तों से बना है तथा ये पर्तें रेडियो ऊर्जा के लिये दर्पण का कार्य करती हैं तथा ऊर्जा का कुछ भाग पृथ्वी की ओर परावर्तित कर देती हैं।

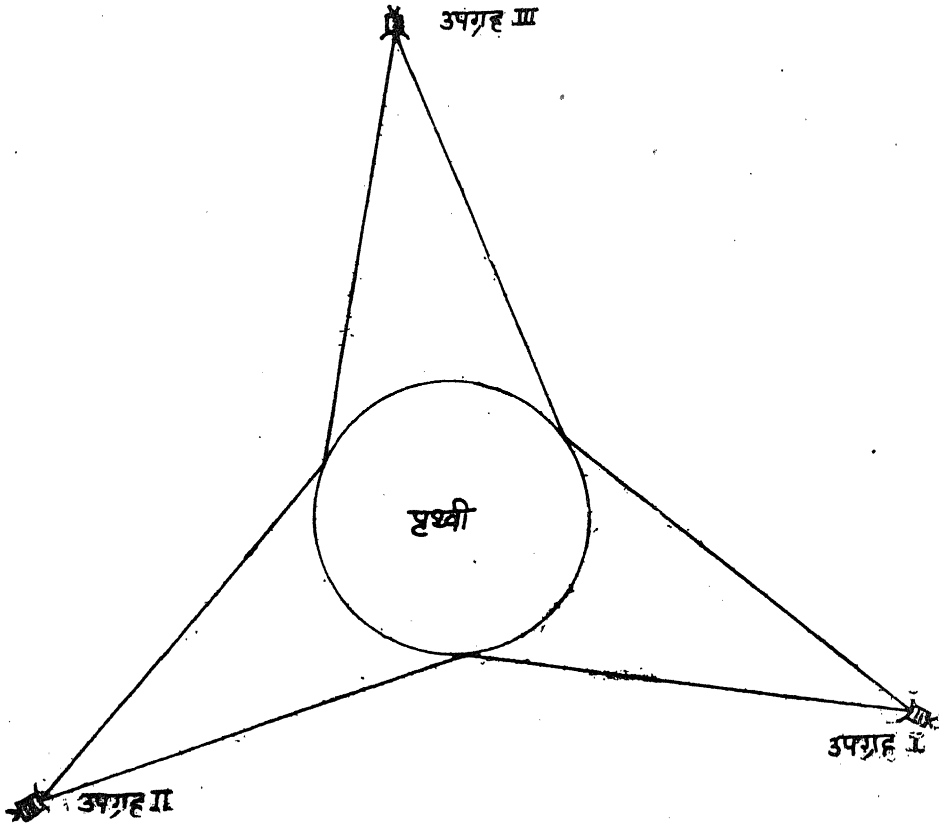
3.3 क्षोभमंडलीय प्रेषण के लाभ : क्षोभ मंडलीय प्रेषण के निम्नलिखित लाभ हैं :

1. एक विशाल क्षेत्र में संचार व्यवस्था स्थापित करने के लिये बहुत कम स्टेशनों की आवश्यकता पड़ती है।
2. विशाल क्षेत्र में एक विश्वसनीय संचार व्यवस्था स्थापित की जा सकती है।
3. अन्य जनसंख्या वाले क्षेत्रों के बीच संचार व्यवस्था स्थापित करने में आर्थिक दृष्टि से काफी उपयोगी है।
4. प्रति कि० मी० रख-रखाव की कीमत कम पड़ती है।

4. उपग्रह संचार प्रणाली

माइक्रोवेव संचार तकनीक तथा उपग्रह संचार प्रणाली के सैद्धान्तिक तरीके में काफी समानता है। अन्तर केवल प्रेषण पावर, बैन्ड चौड़ाई तथा एन्टेना के विशाल आकार में है। प्रेषण एवं अभिग्रहण के लिये लगभग एक तरह के उपकरणों का प्रयोग होता है लेकिन काफी लम्बी दूरी में संचार व्यवस्था स्थापित करने के लिये माइक्रोवेव संस्थान में काफी टावरों और रिपीटर स्टेशनों का प्रयोग होता है। इस समस्या को हल करने के लिये यह विचार किया गया कि अगर काफी ऊंचाई लगभग 22300 मील पर एक रिपीटर स्टेशन लगाया जाय तो पृथ्वी के दो स्टेशनों-एक प्रेषण तथा दूसरा अभिग्रहण स्टेशन-के बीच संचार स्थापित किया जा सकता है। उपग्रह मूल रूप से अन्तरिक्ष में रखा हुआ एक रिपीटर स्टेशन होता है जो पृथ्वी के एक विशाल क्षेत्र में स्थित कई भू-केन्द्रों के बीच संचार

व्यवस्था स्थापित करने में सहायक हो सकता है। इस चित्र 2 में दिखाया गया है कि 22300 मील की दूरी पर स्थित 3 उपग्रह सम्पूर्ण पृथ्वी में संचार व्यवस्था स्थापित कर सकते हैं।



चित्र 2 समकालिक कक्षा में स्थित तीन उपग्रहों के द्वारा सम्पूर्ण पृथ्वी में संचार व्यवस्था

4.1 उपग्रह संचार का इतिहास : 4 अक्टूबर 1957 को रूस के द्वारा छोड़ा गया उपग्रह स्पुतनिक-1 विश्व का पहिला अन्तरिक्ष उपग्रह था। अमेरिका ने 31 जदवरी 1958 को एक्सप्लोरर-1 छोड़कर अन्तरिक्ष युग में प्रवेश किया। एक्सप्लोरर-1 में 3000 मील की दूरी तक संदेश पहुंचाने की क्षमता थी। इसके द्वारा राष्ट्रपति आइजनहोवर का क्रिसमस बधाई संदेश अमेरिका के कई स्थानों को प्रसारित किया गया। इसके उपरान्त 1960 में अमेरिका ने पहिला निष्क्रिय उपग्रह इको-1 छोड़ा। यह निष्क्रिय उपग्रह 100 फुट व्यास के गुब्बारे की आकृति का था। यह पृथ्वी के भू-केन्द्रों से आने वाली विद्युतचुम्बकीय किरणों को पृथ्वी की ओर परावर्तित कर देता था। 1964 में इको-2 भी छोड़ा गया तथा इसका विभिन्न प्रकार का संचार प्रयोग किये गये।

उपग्रह संचार प्रणाली का व्यवसायिक मूल्यांकन 1962 में नासा ने टेलीस्टार-1 उपग्रह अन्तरिक्ष में छोड़कर किया। इस उपग्रह के द्वारा पहिला सार्थक प्रेषण अमेरिका और योरप के बीच किया

गया । टेलीस्टार-2 और नासा के अन्य उपग्रहों-रिले-1 और रिले-2 ने उपग्रह संचार प्रणाली की प्रतिष्ठा और भी बढ़ाई ।

1963 में सिकम-1 उपग्रह ने संचार के क्षेत्र में एक नया अध्याय प्रारम्भ किया । इसके बाद सिकम-2 और सिकम-3 उपग्रह भी अन्तरिक्ष में छोड़े गये । सिकम-4 उपग्रह के द्वारा टोकियो में हुये खेलों का सीधा प्रसारण अमेरिका के लिये किया गया ।

4.2 उपग्रह के भेद : संचार के लिये प्रयोग किये जाने वाले उपग्रहों की दो प्रमुख श्रेणियाँ होती है :

(क) निष्क्रिय उपग्रह

(ख) सक्रिय उपग्रह ।

निष्क्रिय उपग्रह वह है जो पृथ्वी से भेजे गये सिगनल को परिवर्तित करके पृथ्वी की ओर भेज देता है । इसका कार्य दर्पण की तरह होता है । निष्क्रिय उपग्रह में किसी प्रकार के संचार उपकरण नहीं होते । सक्रिय उपग्रह में प्रवर्धक एवं तरंग परिवर्तन के उपकरण लगे होते हैं ।

यद्यपि निष्क्रिय उपग्रह सस्ते होते हैं और प्रेषण बैण्ड चौड़ाई पर किसी प्रकार का बन्धन नहीं डालते, फिर भी उनके प्रयोग करने में सबसे बड़ा दोष यह है कि एक शक्तिशाली प्रेषित्र की आवश्यकता होती है । इससे भू-उपग्रह केन्द्र की कीमत बढ़ जाती है ।

सक्रिय उपग्रह की सबसे आवश्यक चीज है इसकी विश्वसनीयता । यह प्रवर्धक यन्त्रों की सहायता से पृथ्वी से प्राप्त सिगनल के तकनीकी स्तर में सुधार करके तथा तरंग परिवर्तन करके पृथ्वी की ओर भेज देता है । इसमें अनेक अवगुण होते हुये भी केवल इसी गुण के कारण सक्रिय उपग्रह काफी महत्व-शाली है ।

4.3 कक्षीय ऊंचाई तथा उसका प्रभाव : उपग्रहों का वर्गीकरण कक्षीय ऊंचाई के आधार पर भी किया जाता है । कोई उपग्रह पृथ्वी से कम दूरी पर होता है और कोई पृथ्वी से काफी दूरी पर होता है । उपग्रह की पृथ्वी से दूरी अथवा कक्षीय ऊंचाई से ही उपग्रह की कीमत एवं उपयोगिता निश्चित होती है । उपग्रह की दूरी पृथ्वी से जितनी अधिक होगी, उपग्रह पृथ्वी के उतने ही ज्यादा क्षेत्र में संचार व्यवस्था स्थापित करने में सफल होगा । सामान्यतया संचार के लिये उपग्रह अन्तरिक्ष में समकालिक कक्षा में रखे जाते हैं । यह कक्षा पृथ्वी से 36000 किलोमीटर दूरी पर होती है । इस कक्षा की विशेष बात यह है जब उपग्रह इस कक्षा में रखा जाता है तो इसकी और पृथ्वी की सापेक्ष गति शून्य होती है । इसका परिणाम यह होता है कि उपग्रह को ढूँढ़ने के लिये भू-केन्द्र के विशाल एन्टेना को बार-बार घुमाने की आवश्यकता नहीं पड़ती । जैसे-जैसे उपग्रह की कक्षीय ऊँचाई कम होती जाती है उसकी गति बढ़ती जाती है । उपग्रह पर कक्षीय ऊँचाई का निम्नलिखित प्रभाव होता है :

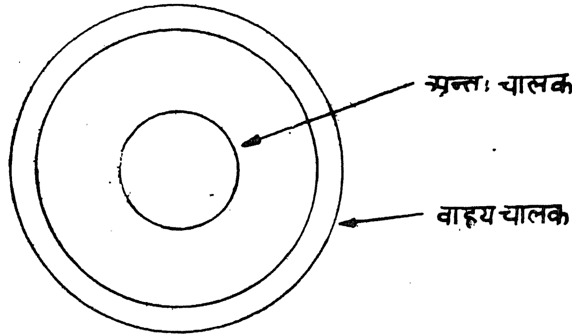
1. निम्न कक्षीय ऊँचाई पर वान एलेन पेटी के उच्च ऊर्जा प्रोटान उपग्रह के सौर ऊर्जा सेलों की कार्य क्षमता कम कर देते हैं ।

2. पृथ्वी की विशाल चुम्बकीय शक्ति निम्न कक्षीय ऊंचाई के उपग्रहों के सन्तुलन को प्रभावित करती है।

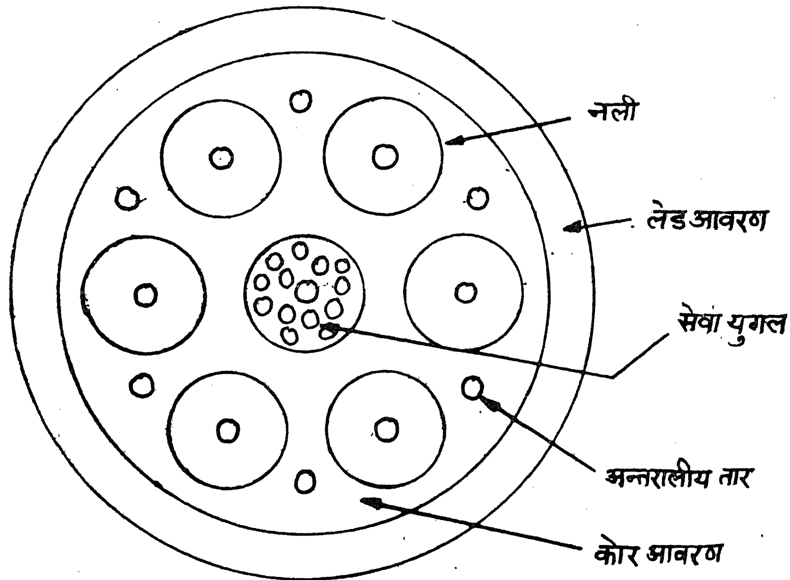
3. निम्न कक्षीय ऊँचाई के उपग्रह पृथ्वी के थोड़े क्षेत्र में तथा उच्च कक्षीय ऊँचाई के उपग्रह पृथ्वी के विशाल क्षेत्र में संचार व्यवस्था स्थापित कर सकते हैं।

5. रेशा प्रकाशिकी संचार

मानव सभ्यता के प्रारम्भ से ही मनुष्य बात के माध्यम से आपस में विचारों का आदान-प्रदान करता आया है। इसके द्वारा "ध्वनि संचार" का आविर्भाव हुआ। जैसे-जैसे संचार दूरियां बढ़ती गईं, तेज ध्वनि



(अ) एक नलीयुक्त कोएक्सल केबुल



(ब) बहुनलीयुक्त कोएक्सल केबुल

चित्र 3 कोएक्सल केबुल संरचना

यंत्रों, जैसे बिगुल, भोंपू एवं घंटों का प्रयोग होने लगा। यहाँ तक कि काफी लम्बी दूरियों में संचार के विशिष्ट तरीके जैसे झंडियां हिलाकर, धुआं के द्वारा तथा पटाखे छोड़कर संचार स्थापित करने के तरीके अपनाये जाने लगे। संचार के इन विशिष्ट तरीकों ने "प्रकाश संचार" को जन्म दिया। पिछले कई साल से विद्युत-चुम्बकीय लहरों का वातावरण में होकर एक स्थान से दूसरे स्थान तक पहुँचना संचार का सीधा-सादा सिद्धान्त रहा है। इस सिद्धान्त के अन्तर्गत ध्वनि अथवा प्रकाश के रूप में प्राप्त संकेत भेजने के पहले वे विद्युत-धारा या विद्युत-विभव के रूप में बदल दिये जाते हैं। इसके बाद ये संकेत किसी माध्यम, तार या वातावरण के अन्दर से गुजरते हैं। यद्यपि प्रकाश में हवा के बीच से सीधे प्रसारण की परिकल्पना काफी पहिले की जा चुकी थी, लेकिन वातावरण में प्रकाश के शोषण के कारण इस दिशा में ज्यादा काम नहीं हो पाया था। वातावरण में प्रकाश के शोषण के कारण प्रकाश संकेत जब वातावरण के अन्दर से गुजरता है तो वातावरण के शोषण के कारण गन्तव्य स्थान तक पहुंचते-पहुंचते प्रकाश संकेत बहुत क्षीण हो जाता है। ऐसी हालत में संचार के लिये इस प्रकाश संकेत का प्रयोग सर्वथा निरर्थक हो जाता।

वैज्ञानिक लोग काफी दिनों से किसी ऐसे माध्यम की खोज कर रहे थे जिसके अन्दर से अगर प्रकाश संकेत गुजरे तो उसकी शक्ति ज्यादा क्षीण न हो। रेशा-प्रकाशिकी तकनीक इन्हीं खोजों का परिणाम है। रेशा-प्रकाशिकी तकनीकी संस्थापना में प्रकाश संकेत काँच की बहुत ही बारीक नालियों के अन्दर से गुजरता है जिसमें प्रकाश संकेत की शक्ति ज्यादा क्षीण नहीं हो पाती है। कांच ही बारीक नलियां "प्रकाशिक रेशा" कहलाती हैं।

5.1 **रेशा प्रकाशिकी तकनीकी संस्थान** : रेशा प्रकाशिकी संस्थापना निम्नलिखित तीन भागों में बाँटी जा सकती है।

(क) ट्रान्समिटर

(ख) प्रकाशिक रेशा केबिल

(ग) अभिग्राही।

वास्तविक अनुरूप टेलीफोन संकेत पहिले संचार के सामान्य उपकरणों की मदद से आंकिक संकेत में बदल दिया जाता है। ट्रान्समिटर के अन्दर यह आंकिक संकेत एक प्रकाशस्रोत को आन-आफ करता है। यह आन-आफ प्रकाश संकेत जब प्रकाशिक रेशा के अन्दर से गुजरता है तब बहुत ही कम शक्ति का ह्रास होता है। अभिग्राही के अन्दर प्रकाश संकेत आंकिक संकेत में बदल जाता है। इस आंकिक में निहित अनुरूप टेलीफोन संकेत अलग कर लिया जाता है। सामान्यतः प्रकाशस्रोत के रूप में लेसर एवं प्रकाश उत्सर्जक डायोड एल० ई० डी० का प्रयोग किया जाता है। एल० ई० डी० सस्ते होते हैं लेकिन उनका प्रयोग कम बैण्ड चौड़ाई के संकेत भेजने में किया जाता है। लेसर का प्रयोग अधिक बैण्ड चौड़ाई के संकेत भेजने में ज्यादा उपयोगी होता है। लेसर का जीवन काल एल० ई० डी० की अपेक्षा काफी कम होता है। प्रकाश संकेत को आंकिक संकेत में बदलने के लिये "एवलांची फोटो डायोड" का प्रयोग किया जाता है।

5.2 भारत में कार्यशील प्रकाशिक रेशा संस्थान : भारत में पहली प्रकाशिक रेशा संस्थापना पूना शहर में शिवाजी टेलीफोन केन्द्र और छावनी टेलीफोन केन्द्र के बीच लगाई गई है । इसमें 120 टेलीफोन लाइनों की क्षमता है । इसका मुख्य उद्देश्य प्रकाशिक रेशा संस्थापना की मरम्मत और स्थापना की दृष्टि से तकनीकी-आर्थिक विश्लेषणा करना है ।

पूना में स्थापित प्रकाशिक रेशा संस्थान 4 किलोमीटर की दूरी तय करती है, जिसके बीच में कई सड़कें और पुल आते हैं । इस संस्थापना में छह् रेशों वाली केबिल का प्रयोग हुआ है । इसके बीच में कुल छह् जोड़ हैं । केबिल प्रयुक्त धातु आवरण, पी० वी० सी० आवरण और पालीथिलीन आवरण केबिल को बाहरी कारणों से होने वाली क्षति से बचाते हैं । सामान्य केबिलों की भांति यह् केबिल भी दाब-सह बनाई जाती है । पूना में कार्यशील संस्थापना के कुछ तकनीकी विवरण सारणी 1 में दिये गये हैं । केबिल 1.5 मी० की गहराई में बिछाई गई है ।

सारणी 1

पूना की रेशा प्रकाशिकी संस्थान का तकनीकी विवरण

(क)	प्रेषण यन्त्र	: एल० ई० डी०
(ख)	बाहरी प्राप्य पावर	: 16 डी० बी० एम०
(ग)	रेशे में प्रेषण-ह्रास	: 3 डी० बी० प्रति कि० मी०
(घ)	कोर का व्यास	: 60 माइक्रोमीटर

6. लेसर प्रेषण

लेसर का अन्य बहुत से उपयोगों के क्षेत्र में भी काफी महत्व है । किसी भी संदेश प्रेषण संस्थान की चैनेल क्षमता उस संस्थान के लिये प्रयुक्त होने वाली आवृत्ति पर निर्भर करती है । आवृत्ति जितनी ज्यादा होगी, चैनेल क्षमता भी उतनी ही ज्यादा होगी । यही बात लेसर संचार प्रणाली में भी लागू होती है । लेसर में प्रयुक्त आवृति आजकल के माइक्रोवेव संस्थानों में प्रयोग की जाने वाली आवृत्ति से लगभग 100000 ज्यादा होती है और इसीलिये इसकी चैनेल क्षमता भी 100000 गुनी ज्यादा होती है । अन्तरिक्ष संचार के लिये भी लेसर का प्रयोग होने लगा है । इसके लिये "लेसर-सैट" भी प्रस्तावित है । लेसर-सेट एक उपग्रह का नाम है जो पृथ्वी से भेजी जाने वाली लेसर किरण का अभिग्रह करके उसे पृथ्वी की ओर भेजेगी । मूलतः यह उपग्रह संचार प्रणाली की तरह कार्य करेगा लेकिन उसमें काफी उच्च आवृत्ति की तरंग का प्रयोग किया जायेगा । लेसर संचार प्रणाली का उपयोग माइक्रोवेव संस्थान की तरह भी हो सकता है लेकिन वह बहुत कम दूरी के लिये सम्भव है ।

7. प्रतिकृति प्रेषण

रेडियो, टेलीफोन, टेलीग्राफ या केबुल के द्वारा चित्र, मानचित्र या किसी कागज में छपे हुये संदेश के भेजने की क्रिया को प्रतिकृति प्रेषण या फेसिमिल ट्रान्समिशन कहते हैं । प्रतिकृति प्रेषण के

मूल सिद्धान्त लगभग 100 साल से ज्ञात हैं। पिछले कुछ सालों में संचार के साधनों में काफी सुधार हो जाने के कारण प्रतिकृति प्रेषण तकनीक को व्यावसायिक स्तर पर प्रयोग किया जाने लगा है। डाटा प्रेषण के क्षेत्र में अत्यधिक विकास हो जाने से प्रतिकृति प्रेषण के ऐसे उपकरणों का निर्माण किया जाने लगा है जिनसे किसी भी कागज में लिखे समाचार या किसी चित्र को भेजने में काफी कम समय लगता है, साथ ही साथ आर्थिक दृष्टि से भी यह काफी सस्ता पड़ता है। प्राचीन काल में प्रतिकृति प्रेषण का समुचित प्रयोग न करने का मुख्य कारण आर्थिक था।

7.1 प्रतिकृति प्रेषण का सिद्धान्त : प्रतिकृति प्रेषण मूलत : दो प्रकार के होते हैं

(क) ग्रे-स्केल

(ख) काला और सफेद

रंगीन प्रतिकृति प्रेषण ग्रे स्केल प्रतिकृति प्रषण तकनीक का विस्तृत रूप है। सभी तरह के प्रतिकृति प्रेषण उपकरणों में एक-एक घूमने वाला ड्रम होता है जिसके ऊपर प्रेषण किये जाने वाले समाचार की कापी लगा दी जाती है। इसके अतिरिक्त एक क्रमवीक्षण उपकरण होता है जो इस कापी को देखता है। क्रमवीक्षण उपकरण कागज में लिखित प्रत्येक लाइन के प्रतिबिम्ब को प्रकाश आवेग के रूप में अंकित कर लेता है। ये प्रकाश आवेग एक परिशुद्ध प्रकाशिकी संस्थान के अन्दर से होते हुये एक फोटोसेल से गुजरते हैं जो प्रकाश सिगनल को विद्युत सिगनल में परिवर्तित कर देता है। इसके बाद ये विद्युत सिगनल दूर संचार के विभिन्न माध्यमों के द्वारा किसी भी निर्दिष्ट स्थान को भेजे जा सकते हैं।

7.2 आधुनिक उपयोग एवं भावी सम्भावनाएँ : प्रतिकृति प्रेषण के प्रारम्भिक उपयोगों को काफी विकसित कर दिया गया है तथा इसके अधिकांश उपयोगों की सम्भावना के प्रयास जारी हैं। इस तकनीक का सबसे बड़ा उपयोग समाचारपत्रों में है, जो हर जगह काफी विशाल पैमाने पर हो रहा है। इसके द्वारा समाचारपत्रों के पूरे आकार के प्रूफ शीट मुख्य केन्द्र से किसी सुदूर प्रकाशन केन्द्र में आसानी से और बहुत अल्प समय में भेजे जा सकते हैं। समाचार पत्र उद्योग में प्रतिकृति प्रेषण तकनीक के अधिकाधिक भावी उपयोग से इंकार नहीं किया जा सकता।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

Cu (II), Ni (II), Cd (II) तथा Mn (II) के साथ मैनिक क्षारक के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक

कमल के० चतुर्वेदी तथा कु० मनोरमा गोयल
रसायन विभाग, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर

[प्राप्त—अप्रैल 26, 1984]

सारांश

मैनिक क्षारक (7-डाइएथैनॉलऐमीनोमेथिल-8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन, (DEMHQ) के साथ Cu (II), Ni (II), Co (II) तथा Mn (II) के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांकों को ज्ञात किया गया। इनके स्थायित्व स्थिरांकों का क्रम इर्विंग-विलियम के अनुसार पाया गया।

Abstract

Stability constants of complexes of the Mannich base with Cu (II), Ni (II), Co (II) and Mn (II). *By* Kamal K. Chaturvedi and Ku. Manorama Goyal, Department of Chemistry, Holker Science College, Indore.

The stability constants of complexes of Cu (II), Ni (II), Co (II) and Mn (II) with the Mannich base 7-diethanomethyl-8-hydroxyquinoline (DEMHQ), have been determined potentiometrically in 75; 25 percent (v/v) dioxane-water mixture at ionic strength μ=0.1. The values of log K_1 and log K_2 have been evaluated using Irving-Rossotti method. The order of stability constants is Cu > Ni > Co > Mn which is in accordance with Irving-William rule.

मैनिक क्षारक फार्मेल्डिहाइड तथा विविध ऐमीनों के साथ 8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन या इसके हैलोजन के व्युत्पन्नों के संघनन से प्राप्त किया जाता है। यह अमीबाप्रतिरोधी[1–5] होता है और अच्छा संकुल कारक है[6–10]। इसके पूर्व[11–14] कुछ मैनिक-क्षारकों के साथ कतिपय द्विसंयोजी धातुओं के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांकों की सूचना दी जा चुकी है। यहाँ पर हम मैनिक क्षारक 7-डाइएथेनॉल ऐमीनो-मेथिल-8-हाइड्राक्सीक्विनोलीन (DEMHQ) के संकुलों के स्थायित्व स्थिरांक सूचित कर रहे हैं। इसके लिये कैल्विन-बेरम विभवमापी अनुमपान प्रविधि[15,16] का उपयोग किया गया जिसे इर्विंग तथा रोसोटी[1] द्वारा परिवर्द्धित किया जा चुका है। हमने 75 : 25 प्रतिशत (v/v) डायोक्सेन-जल मिश्रण में μ=0.1 आयनी सान्द्रता पर तथा 25$\pm$0.1° से० ताप पर ये प्रयोग किये।

प्रयोगात्मक

मैनिक क्षारक (DEMHQ) का संश्लेषण फार्मेल्डिहाइड (0.02 मोल) को डाइएथेनॉल ऐमीन (0 02 मोल) में निरन्तर विलोडन के साथ मिलाकर किया गया। मिश्रण को ठंडा करने के बाद मिश्रण को 20 मिली० एथेनाल में घुले 8-हाइक्सी क्विनोलीन (0.02 मोल) में मिलाया गया। फिर एक बूँद सान्द्र HCl डाल कर मिश्रण को निरन्तर विलोडन के साथ 70-80° पर 1 घन्टे तक पश्चवाहित किया गया। फिर अभिक्रिया मिश्रण को ठन्डा करके फ्लास्क के ठोस पदार्थ को ईथर विलायक में से क्रिस्टलित किया गया और फिल्टर पत्र से छानकर क्रिस्टलों को सुखा लिया गया। इससे हल्के भूरे रंग का ठोस प्राप्त हुआ जिसका गलन बिन्दु 138° था तथा C 63.8, H 6.3, N 10.1% थे जब कि परिगणित मान C 64.1, H 6.9 तथा N 10.7% हैं। लिगैंड की शुद्धता की पुष्टि TLC द्वारा की गई।

प्रयुक्त किया गया डायोक्सेन वोगेल द्वारा बताई विधि से शुद्ध किया गया[18]। पुनः आसवित जल ही काम में लाया गया। लिगैंड विलयन परिशुद्ध डायोक्सोन में बनाया गया। धातु विलयन परक्लोरिक अम्ल में तैयार किये गये। $HClO_4$ तथा $NaClO_4$ के विलेय दुबारा आसुत जल में बनाये गये।

पी-एच मापन फिलिप्स पीपी 9045 डिजिटल पी-एच मीटर द्वारा किया गया। पी-एच मापन के लिये निम्नलिखित विलयन समुच्चय तैयार करके उन्हें मानक सोडियम हाइड्राक्साइड (0.5 M) से अनुमापित किया गया[19]। ये अनुमापन नाइट्रोजन के वातावरण में किये गये।

(a) 5 मिली० (.1 M) $HClO_4$+5 मिली (.70 M) $NaClO_4$+30 मिली० डायोक्सेन।

(b) 5 मिली० (.1 M) $HClO_4$+5 मिली० (.70 M) $NaClO_4$+5 मिल० (.05 M) लिगैंड+25 मिली० डायोक्सेन।

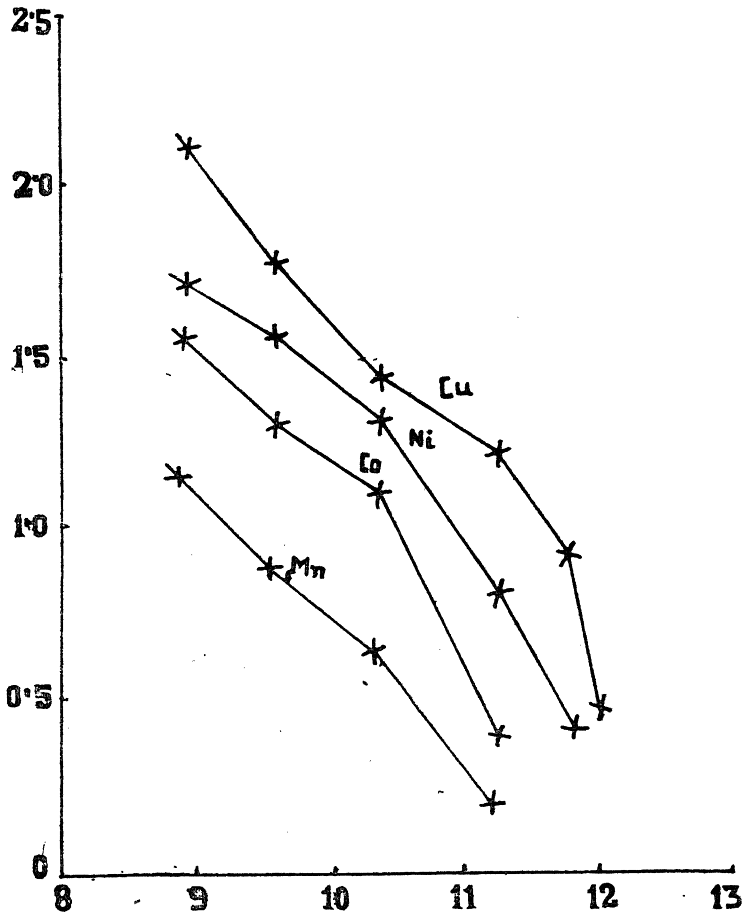
(c) 2.5 मिली० (.1M) $NClO_4$+2.5 मिली० (.01M) धातु विलयन (.1 M) HClO में +5 मिली० (.70 M) $NaClO_4$+5 मिली० (.05 M) लिगैंड +25 मिली० डायोक्सेन।

प्रत्येक प्रणाली कुल आयतन 40 मिली० रखा गया जिसमें डायोक्सेन-जल माध्यम को 75 : 25 प्रतिशत (v/v) पर बनाये रखा गया। अब पी-एच मापी के पाठ्यांकों (B मानों) को-log $[H^+]$ में बदलने के लिये उपयुक्त संशोधन गुणांक का प्रयोग किया गया और उसी के अनुसार वक्र आलेखित किये गये।

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि प्रयोगात्मक दशाओं के अन्तर्गत लिगैंड का जल अपघटन नहीं होता। इसकी पुष्टि अनुमापन के समय शीघ्रता से साम्य स्थापित होने तथा दो घन्टे बाद भी पी-एच में कोई परिवर्तन न होने से होती है।

परिणाम तथा विवेचना

n_A, n तथा p^L के मान इर्विंग तथा रोसोटी के समीकरण[17] की सहायता से परिगणित किये गये। लिगैंड के प्रोटीनीकरण स्थिरांक pk_1^H तथा pk_2^H को क्रमशः अर्ध समाकल बिन्दुओं $n_A=0.5$ 1.5 पर संगणित किया गया। इन मानों की पुष्टि क्रमशः $\log(n_A/1-n_A)$ विपक्ष pH तथा $\log(2-n_A/n_A-1)$ विपक्ष pH के सरल रेखा आलेखों द्वारा की गई। धातु-लिगैंड निर्माण वक्र प्राप्त करने के लिये n मानों को संगत p^L मानों के विपक्ष आलेखित किया गया (चित्र 1)। Cu (II) Ni (II) के निर्माण वक्र पूर्ण हैं अतः $\log k_1$ तथा $\log k_2$ को दो विधियों से प्राप्त किया गया (i) अर्ध समाकलन विधि तथा (ii) न्यूनतम वर्ग विधि। लेकिन Co (II) तथा Mn (II) के निर्माण वक्र ऊपरी अर्धांश में अधूरे हैं क्योंकि अवक्षेपण हो जाता है अतएव $\log k_1$ का मान निर्माण वक्र के आलेख से n=0.5 पर पढ़ लिया जाता है k_2 को एक तीसरी विधि (iii) समीकरण द्वारा अर्ध बिन्दु विधि से परिगणित करते है।



चित्र 1 धातु-लिगैंड निर्माण वक्र

$\log k_1 \cdot k_2\ 2 = p^L$ ($\bar{n}=1.0$) पर $\log k_1$ तथा $\log k_2$ के मान लिगैंड के प्रोटानीकरण स्थिरांकों समेत सारणी 1 में अंकित किये गये हैं।

सारणी 1 में अंकित परिणाम बताते हैं कि धातु-लिगैंड अनुपात 1 : 2 है और स्थायित्व का अनुक्रम Cu > Ni > Co > Mn पाया गया जो इर्विंग-विलियम नियम[21] के अनुसार है।

सारणी 1

धनायन	H+	Cu (II)	Ni (II)	Co (II)	Mn (II)
$\log K_1$	11.52	(i) 12.05	11.72	11.15	10.65
		(ii) 12.3	11.56	—	—
$\log K_2$	4.45	(i) 10.25	9.87	9.1	—
		(ii) 10.785	9.623	—	—
		(ii) —	—	9.89	7.65

(i) अर्ध समाकलन विधि से, (ii) न्यूनतम वर्ग विधि से, (iii) मध्य विन्दु विधि से।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण इन्दौर विश्वविद्यालय के आभारी हैं जिसने कु० मनोरमा गोयल को जूनियर शोध छात्रवृत्ति प्रदान की।

निर्देश

1. ब्रुखाल्टर, जे० एच० तथा एजर्टन, एच० विलियम, J. Am. Chem. Soc., 1951, **73**, 4837.
2. ब्रुखाल्टर, जे० एच० तथा लीब, आई० रोबर्ट, J. Org. Chem. 1961, **26**, 4078: 4070.
3. मैगैरियन आर्मेन रोबर्ट तथा लेविस, डब्लू०, J. Pharm. Sci., 1967, **56**, 987.
4. सेन, ए० बी० तथा कुलकर्नी, डी० यशवन्त, Jour. Indi. Chem. Soc., 1956, **33**, 326-8.
5. कुमार, सत्येन्द्र तथा जोशी, श्यामसुन्दर, Jour. Indian Chem.-Soc., 1964, **41**, 200.
6. फिलिप्स, जे० पी० तथा फर्नैण्डो, क्यू०, J. Am. Chem. Soc. 1953, **75**, 3768.
7. फिलिप्स, जे० पी०, किओन रोब्रर्ट तथा फर्नैण्डो, क्यू०, J. Am. Chem. Soc., 1953, **75**, 4306.
8. वही, J. Org. Chem. 1954, **19**, 907.

9. ट्रैलिना, ई० पी०, सैविच, आई० एच० तथा जेलन्टसेव, वी० वी०, Zh., Neorgan Khim, 1960, 5, 1902-4.

10. शाह, के० जे० तथा पटेल, के० के०, Jour. Indian Chem. Soc., 1978, **55**, 448.

11. चतुर्वेदी, कमल के०, तथा गोयल, मनोरमा, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका** 1983, **26** (2), 83.

12. वही, (प्रेषित)

13. चतुर्वेदी, कमल के०, गोयल, मनोरमा तथा गंगवाल रवि, (प्रेषित)

14. चतुर्वेदी, कमल के० तथा गोयल, मनोरमा, (प्रेषित)

15. बेरम, जे०, Amine formation in aqueous solution. हैसेप, कोपेनहागेन, 1941.

16. कैल्विन, एम० तथा विल्सन, के० डब्लू०, J. Am. Chem. Soc. 1945, **67**, 2003.

17. इर्विंग, एच० तथा रोसोटी, एच० एस०, J. Chem. Soc. 1953, 3397; 1954. 2904.

18. वोगेल, ए० आई०, A Text Book of Practical Organic Chemistry., तृतीय संस्करण, लांगमैनस, पृष्ठ 177.

19. वही, Quantitative Inorganic Analysis., ग्रीनलांगमैन्स तथा लन्दन कं०, 1959.

20. इर्विंग, एच० एम० एन० एच० तथा मैनहाट, यू० एस०, J. Inorg. Nuclear Chem.1968, **30**, 1215.

21. इर्विंग, एच० तथा विलियम्स, आर० के० पी०, Nature. 1948, **162**, 746.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 2, 1985

उपलब्धि से माँग अधिक होने पर परिवहन काल का न्यूनतमीकरण

पी० के० पांडेय तथा आर० एन० मुकर्जी

ऐप्लायड मैथेमेटिकल सेक्शन, स्कूल आँफ अप्लायड साइंसेज, इन्स्टिट्यूट आॅफ टेक्नोलाजी,
बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, वाराणसी-5

[प्राप्त—दिसम्बर 20, 1984]

सारांश

इस शोधपत्र में हमने परिवहन काल की न्यूनतमीकरण समस्या का अध्ययन किया है जबकि मांग उपलब्धि से अधिक हो। इस प्रक्रिया में हम वागेल की सन्निकटन विधि का भी उपयोग करते हैं। समस्या के हल प्राप्त करने की यह विधि अन्य उपलब्ध विधियों से श्रेष्ठतम है।

Abstract

On minimizing the duration of transportation when demand exceeds availability. *By* P. K. Pandey and R. N. Mukherjee, Applied Mathematics Section, School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

In this work we deal a minimization problem of the duration of transportation when demand exceeds avilability. In this process we also use Vogel's approximation procedure. This approach to the solution of the problem is different from all other existing ones.

1. विषय प्रवेश

यह शोधपत्र परिवहन काल के न्यूनतमीकरण से सम्बन्धित है जब माँग उपलब्धि से अधिक हो। कई लेखकों जैसे हैडले[1], ह्यूज तथा ग्रावियाग[2], भाटिया, स्वरूप तथा पुरी[3], शर्मा तथा स्वरूप[4], स्वरूप तथा गुप्त[5], पाण्डेय तथा मुकर्जी[6], सत्य प्रकाश[7], शेषन तथा टिकेटर[8], शर्मा तथा अग्रवाल[9] ने परिवहन काल न्यूनतमीकरण की समस्या का अध्ययन किया। प्रस्तुत शोधपत्र में हमने परिवहन अवधि का न्यूनतमीकरण की समस्या का उस दशा में अपनयन किया है जब माँग उपलब्धि से अधिक हो ताकि समस्या के हल के लिये मानक परिवहन की विधि का उपयोग हो सके।

2. समस्या का सूत्रण

यहाँ हम न्यूनतमीकरण की समस्या पर उस दशा में विचार करेंगे जब कि माँग उपलब्धि से अधिक हो । आइये हम अपने सामान्य m-उद्गम तथा n-गंतव्य वाले परिवहन समस्या पर निम्नलिखित प्रतिबन्धों के साथ विचार करें

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{जब} \quad \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

माना कि d_{ij} उद्गम स्थान i से गन्तव्य j तक उत्पाद के परिवहन की मात्रा है । a_i उद्गम i पर उत्पाद की उपलब्ध इकाइयाँ हैं । b_j गन्तव्य j पर अभीष्ट उत्पाद की इकाइयाँ नीचे दिये हुये व्यवरोधों के अन्तर्गत उद्गम i से गन्तव्य j तक मार्ग-निर्धारण में न्यूनतम अवधि सुनिश्चित करना है । माना x_{ij} उद्गम i से गन्तव्य j तक वाहित उत्पाद को इकाइयों की संख्या है । हमारी समस्या निम्नलिखित है

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, d_{ij} \text{ का न्यूनतमीकरण करें} \tag{2.1}$$

$$z = \max \{d_{ij} : x_{ij} > 0 (i=1 \ldots m, j=1 \ldots n)\}$$

का न्यूनतमीकरण करें जिसमें निम्नलिखित व्यवधान हैं

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1 \ldots m \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \qquad (j=1, \ldots \text{m}) \tag{2.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad (i=1 \ldots m, j=1 \ldots n) \tag{2.4}$$

3. हल की प्रक्रिया

जब भी $\sum_{j=1}^{m} a_i \subseteq \sum_{j=1}^{n} b_j$ हों परिवहन सारिणी में एक मूक स्रोत स्थापित करें । इस स्रोत से किसी अन्य गन्तव्य तक के परिवहन को शून्य कर दिया जाता है । इस मूक स्रोत पर उपलब्धि, $\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i$ के बराबर मानी जाती है । व्यवधानों को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1, \ldots m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant d_j \qquad j=1, \ldots n$$

दूसरे व्यवधानों में आधिक्य पूरक चरों $x_{m+1,j}$ $(j=1, \ldots n)$ के समावेश से निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - x_{m+1,j} = b_j \quad j=1, \ldots n$$

अथवा

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{m} x_{ij} - x_{m+1,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

अथवा

$$\sum_{j=1}^{n} x_{m+1,j} = \sum_{r=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = a_{m+1}$$

इस दशा में परिबर्द्धित सामान्य परिवहन समस्या निम्नलिखित हो जाती है

$$z = \sum_{i=1}^{m+1} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \, d_{ij} \tag{3.1}$$

को निम्नलिखित व्यवधानों के अर्न्तगत न्यूनतम करना

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i=1 \ldots m+1 \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} - x_{m+1} j = b_j \qquad i=1, \ldots n \tag{3.3}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad i=1, \ldots m+1; \; j=1, \ldots n \tag{3.4}$$

जबकि

$c_{m+1}, j=0$ क्योंकि $j=1, \ldots n$ तथा $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

सारणी बनाने के लिये हम केवल एक पंक्ति और बढ़ा देते हैं अर्थात् अधिशेष के लिये एक अतिरिक्त गन्तव्य देकर इस समस्या को स्वरूप तथा गुप्ता[5] द्वारा वर्णित इष्टतमकारी प्रोग्रामन में समानीत कर देते हैं। इस स्रोत से किसी अन्य गन्तव्य तक के लागत को शून्य के बराबर रख दिया जाता है। ऐसा करने के लिये समुच्चय $\{(d_{ij} : i=1 \ldots m, j=1 \ldots n)\}$ को उपसमुच्चयों Sk $(k=1, -q)$ में निम्न प्रकार से विभाजित करते हैं। प्रत्येक उपसमुच्चय Sk में एक ही संख्यात्मक मान वाले d_{ij} होते हैं। S_1 में महत्तम

मान वाले d_{ij} है, S_2 में उससे कम महत्तम मान वाले d_{ij} इत्यादि। अन्त में S_q में सबसे कम मान वाले d_{ij} हैं। इसके बाद SK $(K=1, 2, \ldots, q)$ के d_{ij} के संगत प्रत्येक x_{ij} के साथ लागत MK को सम्बद्ध करते हैं। सभी MK धनात्मक संख्यायें हैं। वैकल्पिक समस्या के रूप में हम $x_{ij} \geqslant 0$ $(i=1 \ldots m)$, $(j=1 \ldots n)$ का निर्धारण चाहते हैं जो

$$z = C\left(\sum_{k=1}^{q} MK \sum_{sk} x_{ij}\right) \tag{3.5}$$

को व्यवधानों (3.2) तथा (3.3) के अन्तर्गत न्यूनतम कर दें।

यहाँ $\sum_{SK} x_{ij}$ SK से सम्बन्धित d_{ij} के संगत x_{ij} को निर्देशित करता है तथा C इस प्रकार का फलन है कि

$$C\left(\sum_{k=1}^{q} MK \sum_{SK} x_{ij}\right) = MP \sum_{SP} \text{ जबकि } P = \min \{K : \sum_{SK} x_{ij} = 0\}. \tag{3.6}$$

(3.6) में फलन C प्रत्येक MK को गुणात्मक रूप से MK_{k+1} से अधिक बड़ा मानता है। यह ध्यान देने की बात है कि प्रस्तुत समस्या एक वैकल्पिक समस्या के तुल्य है क्योंकि दोनों समस्याओं के वस्तुनिष्ठ फलन का न्यूनतमीकरण $x_{ij} > 0$ $\{i=1 \ldots m, j=1 \ldots n\}$ का निर्धारण करता है जिसके लिये उत्पाद का स्रोत से गन्तव्य तक का परिवहन काल अल्पतम होगा। यह तुल्य समस्या रैखिक प्रोग्रामन प्रकार की समस्या है जिसे मानक परिवहन की विधि से आसानी से हल कर लेते हैं।

4. संख्यात्मक उदाहरण

अब हम उपरोक्त प्रक्रिया का $m=3, n=3, n=5$ लेकर निम्नलिखित समस्या में उपयोग करेंगे तथा इस संख्यात्मक समस्या का सारणी निरूपण निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है।

		D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
	01	90	50	70	60	40	60
से	02	60	90	80	70	30	70 उपलब्धि
	03	50	80	80	70	60	40
		30	30	40	30	80	

माँग

टिप्पणी—ऊपर वाली सारणी में $\Sigma a_i < \Sigma b_j$ (200 इकाई से 170 इकाइयाँ=30 इकाइयाँ) अतः स्रोत से किसी भी गन्तव्य तक के परिवहन की लागत को शून्य कर दिया जाता है। ऊपर की सारणी निम्नलिखित प्रारूप ग्रहण कर लेती है

सारणी 1

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
01	90	50	70	60	40	60
02	60	90	80	70	30	70
03	50	80	80	70	60	40
04	0	0	0	0	0	30
	30	20	40	30	80=200 इकाइयाँ	

सारणी 1 में पंक्ति की i को O_i तथा स्तम्भ j को D_j द्वारा प्रदर्शित किया गया है। सारी कोष्ठिकायें (i, j) के ठीक नीचे उत्पाद के स्रोत i $(i=1...4)$ से गन्तव्य j $(j=1...4)$ तक के परिवहन काल की इकाई दी गयी है। इस समस्या का वस्तुनिष्ठ फलन निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है

$$z=\max \{d_{ij} : x_{ij}>0 \qquad (i=1...4,\ j=1...5)\}.$$

संख्यात्मक समस्या के लिये समुच्चय $\{d_{ij}\ {}^{i=1...4}_{j=1...5}\}$ के विभाजन का उपसमुच्चय निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है

$S_1=\{d_{11}\ d_{22}\}$ $\qquad S_2=\{d_{32}, d_{33}, t_{23}\}$ $\qquad S_3=d_{13}, d_{24}, d_{34}\}$

$S_4=\{d_{14}, t_{21}, t_{35}\}$ $\qquad S_5=\{d_{12}, d_{31}\}$ $\qquad S_6=\{d_{15}\}$

$S_7=\{d_{25}\}$ $\qquad S_8=\{d_{41}, d_{42}, d_{43}, d_{44}, d_{45}\}$

$S_1, S_2, S_3\ S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$ में d_{ij} के मान क्रमश: 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 0 है।

टिप्पणी—वागेल के सन्निकटन विधि से हम सारणी 2 प्राप्त करते हैं :

सारणी 2

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
01	90	[20] 50	70	60	[40] 40	60
02	60	90	80	[30] 70	[40] 30	70
03	[30] 50	80	10 80	70	60	40
04	0	0	[30] 0	0	0	30
b_j	30	20	40	30	80	200 units

सारणी 2 में आधारी कोष्ठिका की संख्या 7 है जो $m+n-1$ $(5+4-1=8)$ से कम है तथा हल अपभ्रष्ट हो जाता है। मानक परिवहन विधि से उपरोक्त सारणी निम्नलिखित प्रारूप ले लेती है।

सारणी 3

उपरोक्त समस्या से सम्बद्ध तुल्य समस्या का निरूपण

M_1	30 M_5	+ M_3	M_4	40 − M_6
M_4	M_1	M_2	30 − M_3	40 + M_7
30 M_5	M_2	10 − M_2	θ M_3	M_4
M_8	M_8	30 M_8	M_8	M_8

इष्टतम आधारी सुसंगत हल को दर्शाने वाली अन्तिम सारणी को 4 में दिया गया है। इस सारणी में सारी अनाधारी कोष्ठिकाओं के संगत $(z_{ij}-C_{ij})$, (3.6) की भाँति C फलन के अनुप्रयोग के बाद, अधनात्मक हैं जो इस बात का द्योतक है कि आधारी सुसंगत हल इष्टतम है। तुल्य समस्या के लिये जिस वस्तुनिष्ठ फलन को हम अल्पतम करना चाहते हैं वह निम्नलिखित है

$$z=C(M_1(x_{11}+x_{22})+M(x_{32}+x_{23})+M_3(x_{13}+x_{24}+x_{34})$$
$$+M_4(x_{14}+x_{21}+x_{35})+M_5(x_{12}+x_{31})+M_6(x_{15})+M_7(x_{25})$$
$$+M_8(x_{41}+x_{42}+x_{43}, x_{44}, x_{45}))$$

यहाँ C $q=8$ के साथ (3.6) द्वारा परिभाषित फलन है।

सारणी 4 इष्टतम आधारी सुसंगत हल

M_1	20 M_5	10 M_3	M_4	30 M_6
M_4	M_1	M_2	20 M_3	50 M_7
30 M_5	M_2	M_2	10 M_3	M_4
M_8	M_8	30 M_8	M_8	M_8

आधारभूत चरों का मान सारणी 4 में है, इष्टतम आधारी सुसंगत हलों को वृत्त के भीतर लिखा गया है। पुनः हम देखते हैं कि महत्तम लागत max $\{M_3, M_5, M_6, M_7, M_8\}$ है अर्थात् समुच्चय $S_3=\{d_{13}; d_{24}, d_{34}\}$ जिसके प्रत्येक अवयव का मान 70 है के d_{ij} के संगत x_{ij} से सम्बद्ध x_{ij}

की लागत M_3 है d_{34} उत्पाद के स्रोत 3 से गन्तव्य 4 तक के परिवहन की मात्रा की इकाई है अभीष्ट हल $d_{34}=70$ इकाइयाँ है।

निर्देश

1. हैडले, जी०, Linear programming, ऐडिसन वेजली रीडिंग मैसाचुसेट्स, 1962.
2. ह्यूजेज, ए० जे० तथा ग्रेवियाग, डी० ई०, Linear programming, an emphasis on decision making (UDA:Addision Wesley, 1973, 300-312.
3. भाटिया, एच० एल०, स्वरूप, के० तथा पुरी, एम० सी०, Indian J. Pure. Appl. Math. 1977, **8**, 920-929.
4. शर्मा, जे० के० तथा स्वरूप, के०, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 1977, **86**, 513-518.
5. स्वरूप, के०, गुप्ता, पी० के० तथा मनमोहन, Operation Research, सुल्तान चांद एण्ड सन्स दरियागंज, नई दिल्ली, 1977, पृ० 352-372.
6. पाण्डेय, पी० के० तथा मुकर्जी, आर० एन०, Advances in management studies, Indian Instt. of Management Studies. (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)।
7. सत्य प्रकाश, Proc. Indian Acad Sci. (Math Sci.), 1977, **91**, 513-18.
8. शेषन, सी० आर० तथा टिकेटर, वी० जी०, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 1980, 89-101.
9. शर्मा, जे० के०, अग्रवाल, एस० सी०, Acta di India 1976, **2** (3), 278-280.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

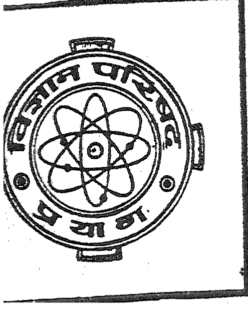
मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 8 पौंड या 32 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 2 पौंड या 8 डालर

Rates
Annual Rs. 12 *or* 8 £ *or* $ 32
Per Vol. Rs. 3 *or* 2 £ *or* $ 8

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad,211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 28	July 1985	No. 3

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा
कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च
नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

विषय-सूची

1.	लागेर श्रेणी की (V, λ) संकलनीयता	बी० एल० जड़िया	259
2.	जैकोबी श्रेणी की लघुगणकीय संकलनीयता	एस० पी० खरे	265
3.	फूरिये-जैकोबी श्रेणी की परम नारलुंड संकलनीयता	एस० एन० अग्रवाल तथा एस० के० वर्मा	271
4.	मुर्गी के अण्डों में क्रोमियम की उपस्थिति	कु० शिखा सक्सेना, संजय तिवारी तथा बी० एम० एल० तिवारी	279
5.	हाइपर ज्यामितीय फलन $_2F_2$ वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन	बी० के० जोशी	283
6.	सार्वीकृत स्ट्रूव फलन और इसका आवृति सूत्र	राजेन्द्र प्रसाद सिंह	287
7.	जीवाणु 1:2:1:2 J 24 द्वारा सूर्य के प्रकाश में जल के प्रकाशिक विखण्डन पर खनिज विलयनों का प्रभाव	के० बहादुर, एस० रंगनायकी तथा एस० के० सिंह	293
8.	भानाखाप अभ्रक खान (जिला गया, बिहार) के पेग्माटाइट में उपस्थित टूरमेलीन की उत्पत्ति तथा खनन में महत्व	दुर्गापद कुदति	301
9.	जल-वाष्प में जोशी प्रभाव की पृष्ठीय संवेदनशीलता पर भित्ती-विलेपन का महत्व	जगदीश प्रसाद	305
10.	बंधित जल अणु और उसका MgO की ताप उद्दीपित प्रतिदीप्ति पर प्रभाव	एम० एल० बापट तथा एस० शिवरामन	309

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

लागेर श्रेणी की (V, λ) संकलनीयता

बी० एल० जड़िया
शासकीय महाविद्यालय, रामपुरा (म० प्र०)

[प्राप्त—अप्रैल 4, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लागेर श्रेणी की (v, λ) संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध की गई है।

Abstract

On the (v, λ) summability of Laguerre series. *By* B. L. Jadiya, Government College, Rampura (M. P.).

In this paper, we have proved a theorem on (v, λ) summability of Laguerre series.

1. माना कि S_n किसी अनन्त श्रेणी $\Sigma\, C_n$ के n पदों का योगफल है, तथा $\{\lambda_n\}$ कोई पूर्णांकों का अनवरोही इस प्रकार का अनुक्रम है कि $\lambda_1 = 1$ और $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leqslant 1$ । अनुक्रम $\{S_n\}$ का दे-ला-वाली-पूसी माध्य $V_n(\lambda)$ निम्न प्रकार से परिभाषित है।

$$V_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{v=n-\lambda_n}^{n-1} S_v \qquad (n \geqslant 1) \tag{1.1}$$

श्रेणी $\Sigma\, C_n$, (V, λ) संकलनीय कहलायेगी यदि अनुक्रम $\{V_n, (\lambda)\}$ अभिसारी है।

किसी फलन $f(x) \in L(o, \infty)$ की लागेर श्रेणी को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता हैं।

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x) \tag{1.2}$$

जहाँ

$$a_n = \left\{\Gamma(\alpha+1) A_n^{\alpha}\right\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha} f(y)\; L_n^{(\alpha)}(y)\, dy \tag{1.3}$$

तथा $L_n^{(\alpha)}(x)$, n वाँ लागेर बहुपद है जिसका कि जनपद फलन

$$(1-w)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{-xw}{1-w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n L_n^{(\alpha)}(x),\ \alpha>-1,\ |w|<1 \text{ है ।}$$

2. श्रेणी (1.2) की चेजारो संकलनीयता जेगो[3], काम्बेलियांज[1] तथा पांडे[2] द्वारा सिद्ध किया गया है ।

प्रमेय A

यदि $\alpha>-1$ $\beta>0$, के लिये

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\phi(y)|\, dy = 0(t^{\alpha+1}),\ t \to 0 \tag{2.1}$$

$$\int_w^{3n} e^{y/2}\, y^{-\alpha-\beta/2-1} |\phi(y)|\, dy = 0\,(n^{\beta/2}), \tag{2.2}$$

तथा

$$\int_{3n}^{\infty} e^{+y/2}\, y^{-\alpha-\beta-5/6} |\phi(y)|\, dy = 0(1) \tag{2.3}$$

तो श्रेणी (1.2), $x=o$ बिन्दु पर $f(o)$ योग पर $(C, \alpha+\beta+1/2)$ संकलनीय़ होगी जहाँ

$$\phi(y) = \frac{e^{-y}\, y^{\alpha}\, [f(y)-f(0)]}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{2.4}$$

हम देखते हैं कि (1.1) में $\lambda_n=n$ रखने पर (V, λ) संकलनीयता, $(C, 1)$ संकलनीयता हो जाती है ।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम $x=o$ पर श्रेणी (1.2) की (V, λ) संकलनीयता पर निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे । हमारे प्रमेय की शर्त (2.5) प्रमेय A से व्यापक हैं ।

प्रमेय

यदि $\{\lambda_n\}$ पूर्णांकों का अनवरोही अनुक्रम इस प्रकार है कि

$$\lambda_1=1,\ \lambda_{n+1}-\lambda_n \leqslant 1 \text{ तथा } \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n} = 0,$$

तो श्रेणी (1.2) विन्दु $x=o$ पर योग $f(o)$ की (V, λ) संकलनीय होगी, बशर्ते

$$\Phi(t) \equiv \int_0^t |\phi(y)|\, dy = 0\left\{t^{\alpha+2}\, \lambda(1/t)\right\},\ t \to 0 \tag{2.5}$$

$$\int_w^n e^{y/2}\, y^{-(\alpha/2+5/4)} |\phi(y)|\, dy = 0\left\{n^{-(\alpha/2+3/4)}\, \lambda_{(n)}\right\} \tag{2.6}$$

तथा

$$\int_n^{\infty} e^{y/2}\, y^{-(\alpha/2+13/12)}\, |\phi\,(y)|\;\, dy=0\left\{n^{-(\alpha/2+3/4)}\;\lambda_{(n)}\right. \tag{2.7}$$

जहाँ $\phi(y)$, (2.4) द्वारा परिभाषित है तथा $\lambda(n)=\lambda_n$.

3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये हमें निम्नलिखित क्रम अनुमान (order estimate) की आवश्यकता होगी ।

क्रम अनुमान : [जेगो [3], पृ० 175] यदि α ऐच्छिक, वास्तविक C तथा w धनात्मक स्थिरांक हों तथा $n\to\infty$, तब

$$L_n^{(\alpha)}\;(x)=\begin{cases} O(n^{\alpha/2-1/4}),\; x^{-\alpha/2-1/4};\; c/n\leqslant x\leqslant w, & (3.1)\\ O(n^{\alpha});\; o\leqslant x\leqslant c/n. & (32.)\end{cases}$$

परावलयी रूप : यदि α व λ के ऐच्छिक और वास्तविक, $w>o$, $o<\eta<4$, तब $n\to\infty$, के लिये

$$\max\, e^{-\alpha/2}\, x^{\lambda}\, |L_n^{(\alpha)}\;(x)|\sim n^{Q} \tag{3.3}$$

जहाँ

$$Q=\begin{cases} \max\,(\lambda-1/2,\; a/2-1/4);\; \text{यदि}\;\; w\leqslant x\leqslant(4-\eta)n & (3.4)\\ \max\,(\lambda-1/3,\; a/2-1/4);\;\; \text{यदि}\; x\geqslant w. & (3.5)\end{cases}$$

[देखिये (2), पृ० 239]

4. **प्रमेय की उपपत्तिः** परिभाषा से

$$S_v(o)=\sum_{m=0}^{v} a_n\, L_m^{(\alpha)}\;(o)$$

$$=\sum_{m=0}^{v}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}\,y^{\alpha}\;\, f(y)\, L_m^{(\alpha)}\;\,(y)\;\, L_m^{(\alpha)}}{\Gamma(a+1)}\, dy^{o}$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}\, y^{\alpha}\, f(y)\;\, L_v^{(\alpha+1)}\;\,(y)}{\Gamma(a+1)}\, dy \qquad \text{[देखिये (3)]}$$

$$\therefore \qquad V_n\;(\lambda)=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{v=n-\lambda_n}^{n-1} S_v\,(o)$$

$$=\frac{1}{\lambda_n}\sum_{v=n-\lambda_n}^{n-1}\left\{\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}\; y^{\alpha}\, f(y)\; L_v^{(\alpha+1)}\;\;(y)}{\Gamma(a+1)}\;\; dy\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\infty \frac{e^{-y}\, y^\alpha\, f(y)}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{ L_{n-1}^{(\alpha+2)}(y)-L_{n-\lambda n-1}^{(\alpha+2)}(y) \right\}$$

लागेर बहुपद का लाम्बिक गुण एवं (2,4) के उपयोग से

$$V_n(\lambda)-f(o)=\frac{1}{\lambda_n}\int_0^\infty \phi(y)\left\{ L_{n-1}^{(\alpha+2)}(y)-L_{n-\lambda n-1}^{(\alpha+2)}(y) \right\} dy$$

$$=\int_0^{c/n}+\int_{c/n}^{w}+\int_w^n+\int_n^\infty$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

(3.2) के प्रयोग से

$$I_1=O\left(\frac{n^{\alpha+2}}{\lambda_n}\right)\int_0^{c/n} |\phi(y)|\, dy$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha+2}}{\lambda_n}\right).\ o\left\{n^{-\alpha-2}\,\lambda(n)\right. \quad (2.5) \text{ से}$$

$$=o(1).$$

(3·1) के प्रयोग से

$$I_2=O\left(\frac{n^{\alpha/4+3/2}}{\lambda_n}\right)\int_{c/n}^{w} y^{\alpha/2+5/4}|\phi(y)|\; dy$$

$$=Q\left(\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n}\right)\left[\left(\frac{\Phi(y)}{y^{\alpha/2+5/4}}\right)_{c/n}^{w}-\int_{c/n}^{w} y^{-\alpha/2-1/4}\,\Phi(y)\, dy\right]$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n}\right)\left[O(1)+o\{n^{-\alpha/2-3/4}\lambda_{(n)}\}\right] \quad ((2.5) \text{ से})$$

$$=o(1). \text{ (परिकल्पना से)}$$

(3.3) तथा (3.4)के प्रयोग से

$$I_3=O\left(\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n}\right)\int_w e^{y/2}\; y^{-(\alpha/2+5/4)}\, |\Phi(y)|\; dy$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n}\right)\; o\left(\, n^{-\alpha/2-3/4}\,\lambda(n)\right)\}\Big] \quad ((2.6) \text{ से})$$

$$=o(1).$$

(3.3) व (3.5) से

$$I_4=O\left(\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n}\right)\int_n^\infty e^{y/2}\, y^{-(\alpha/2+13/12)}\, |\phi(y)|\; dy$$

$$=O\left(\frac{n^{\alpha/2+3/4}}{\lambda_n}\right).\,o\left\{ n^{-(\alpha/2+3/4)}\,\lambda_{(n)}\right\}$$

$$=o\,(1).$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी एवं मार्गदर्शन के लिये डॉ० बी० के० व्योहार का आभारी है।

निर्देश

1. काग्बेलियांज, ई०, Trans. Amer. Math. Soc., 1935, **38**, 10-47.

2. पांडे, जी० एस०, Vikram Math Jour., 1967, **2**, 41-61.

3. जेगो, जी०, Amer. Math Soc., 1959, **23**, न्यूयार्क

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

जैकोबी श्रेणी की लघुगणकीय संकलनीयता

एस० पी० खरे
गणित विभाग, मेहता महाविद्यालय, भरवारी, इलाहाबाद

[प्राप्त—जून, 5, 1984]

सारांश

इस शोध पत्र में $x=1$ पर जैकोबी श्रेणी की लघुगणकीय संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध की गई है।

Abstract

Logarithmic summability of Jacobi series. *By* S. P. Khare, Department of Mathematics, Mehta College, Bharwari, Allahabad.

In this paper we prove a theorem on logarithmic summability of Jacobi series at the point $x=1$.

1. बोरवाइन[1] ने निम्नलिखित परिभाषा दी है। अनन्त श्रेणी $\Sigma\, a_n$ लघुगणकीय विधि से संकलनीय अथवा संकलनीय $L\,(S)$ में होगी, X के उस मान के लिये जो अन्तराल $(0, 1)$ में स्थित हो, यदि

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{n}\,x^n=S,$$

जहाँ S_n श्रेणी $\Sigma\, a_n$ का nवाँ आंशिक संकलन है।

2. माना कि $f(x)$ अन्तराल $[-1, 1]$ में x के प्रत्येक मान के लिये इस प्रकार परिभाषित है कि

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta} f(x)\,dx$$

लेबेग की परिभाषा के अनुसार अभिसारी हैं। फलन $f(x)$ से सम्बन्धित जैकोबी श्रेणी है :

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.1}$$

जिसमें

$$a_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\, \Gamma(n+1)\, \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\, \Gamma(n+\alpha+1)\, \Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}\, (1+x)^{\beta} f(x)\, P_{n(x)}^{(\alpha,\beta)}\, (x)\, dx.$$

तथा $P^{(\alpha,\beta)}\, x$ जैकोबी बहुपद है ।

हाल ही में गुप्ता[2] ने अन्तराल $[-1, 1]$ के सीमान्त बिन्दुओं पर श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, P_n\, (x)\, (\alpha=0=\beta)$$

के लिये (L) संकलनीयता पर एक शोधपत्र प्रकाशित किया है जिसमें निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध है ।

प्रमेय A

यदि

$$\int_t^{\delta} \frac{|\psi\,(u)|}{u^{3/2}}\, du = 0\, (t^{1/2} \log 1/t)$$

ज्यों-ज्यों $t \to 0$, तब श्रेणी $\Sigma\, a_n\, P_n\, (x)$ बिन्दु $X=1$ पर A में (L) संकलनीय होगी जहाँ

$$\psi\,(u) = \{f(\cos u) - A\} \sin u \text{ हैं ।}$$

हम लिखेंगे

$$\psi\,(\phi) = \{f(\cos \phi) - A\}$$

जहाँ A अचर हैं और हम निम्नांकित प्रमेय स्थापित करते हैं ।

प्रमेय 1

यदि

$$\int_t^{\pi-t} \frac{|\psi\,(\phi|)}{\phi^{3/2-\alpha}} d\phi = 0\, (\log 1/t),\ t \to 0 \tag{2.2}$$

तब श्रेणी (2.1) बिन्दु $X=1$ पर A में (L) संकलनीय होगी, जहाँ $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}<\beta$ बशर्ते कि

या तो

$$\int_{-1}^{b} (1-x)^{\beta/2-3/4} |f(x)| \, dx < \infty \tag{2.3}$$

या फिर

$$f(x), x \text{ का समफलन है ।} \tag{2.4}$$

टिप्पणियां

1. ठीक इसी प्रकार प्रमेय बिन्दु $X=-1$ के लिये भी दिया जा सकता है । इसके लिये हमें उपर्युक्त प्रमेय α तथा β प्राचलों में हेर-फेर करना होगा ।

2. यदि प्रतिबन्ध (2.2) लागू होता है तो

$$\int_{0}^{t} |\psi(\phi)| \, d\phi = o\,(t^{3/2-\alpha} \log 1/t),\ t \to 0 \tag{2.5}$$

3. यहाँ हम विभिन्न लेखकों द्वारा सिद्ध किये गये कुछ ऐसे परिणामों को लिख रहे हैं जिनकी हमें आगे चलकर आवश्यकता पड़ेगी ।

प्रमेयिका[4] 1

यदि α, β स्वेच्छ वास्तविक संख्या है, C नियत धनात्मक स्थिरांक है, तब यदि $n \to \infty$ तो

$$P_n^{(\alpha,\beta)} (\cos \theta) = O\,(n^{\alpha}) \text{ जहाँ } o \leqslant \theta \leqslant C/n$$

प्रमेयिका[4] 2

यदि α, β स्वेच्छ वास्तविक संख्याएँ हैं, तब

$$P_n^{(\alpha,\beta)} (\cos \theta) = n^{-1/2}\, k(\theta) \left[\cos (N\theta + \gamma) + \frac{O(1)}{n \sin \theta}\right]$$

यदि

$$1/n \leqslant \theta \leqslant \pi - 1/n$$

जहाँ

$$k(\theta) = \pi^{-1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2}$$

$$N = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2},\ \gamma = -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$$

प्रमेयिका[3] 3

यदि प्रतिबन्भ (2.3) सही हैं, तो

$$\int_{0}^{1/n} t^{\beta-1/2} |f(-\cos t) - A| \, dt = 0\,(1)$$

प्रमेय की उपपत्ति

हमें ज्ञात है कि[3]

$$S_n(1)-A=2^{\alpha+\beta+1}\lambda_n\int_0^\pi\Big[\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{2\beta+1}\cdot\Big\{f(\cos\phi)-A\Big\}P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi\Big]$$

जहाँ

$$\lambda_n=\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)}n^{\alpha+1}$$

अत:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\{S_n(1)-A\}$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\Sigma\frac{x^n}{n}\lambda_n\int_0^\pi\Big[\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{2\beta+1}\psi(\phi)\,P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi\Big]$$

$$=O\Big[\sum_{n=1}^{\infty}x^n n^{\alpha}\int_0^\pi\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{2\alpha+1}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{2\beta+1}|\psi(\phi)|\,P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi\Big]$$

$$=O\Big[\sum_{n=1}^{\infty}x^n n^{\alpha}\Big\{\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}\Big\}d\theta\Big]$$

$$=O\,[I_1+I_2+I_3]$$

अब

$$I_1=O\Big[\sum_{n=1}^{\infty}x^n n^{\alpha}\int_0^{1/n}\phi^{2\alpha+1}\;|\psi(\phi)|\;n^{\alpha+1}\,d\phi\Big]$$

$$=O\Big[\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cdot o\Big(\frac{\log n}{n^{3/2-\alpha}}\Big)\Big]$$

$$=o\Big\{\log\frac{1}{1-x}\Big\}$$

प्रमेयिका 2 से

$$I_2=O\Big[\Sigma\,x^n n^{\alpha-1/2}\int_{1/n}^{\pi-1/n}\Big\{\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{\alpha-1/2}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{\beta+1/2}|\psi(\phi)|\,d\phi\Big\}\Big]$$

$$+O\Big[\Sigma\,x^n n^{\alpha-3/2}\int_{1/n}^{\pi-1/n}\Big\{\Big(\sin\frac{\phi}{2}\Big)^{\alpha-3/2}\Big(\cos\frac{\phi}{2}\Big)^{\beta-1/2}|\psi(\phi)|\,d\phi\Big\}\Big]$$

$$=I_{2,1}+I_{2,2}\text{ माना}$$

जहाँ

$$I_{2,1}=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha-1/2}\int_{1/n}^{\pi-1/n}\frac{|\psi(\phi)|}{\phi^{1/2-\alpha}}d\phi\right]$$

क्योंकि $\beta+\frac{1}{2}>0$

$$=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha-1/2}\, o\,(\log n)\right]$$

$$=o\left\{\log\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}$$

तथा

$$I_{2,2}=O\left[x^n\, n^{\alpha-3/2}\int_{1/n}^{\pi-1/n}\phi^{\alpha-3/2}\,|\psi(\phi)|\,d\phi\right],\ \beta>\frac{1}{2}$$

$$=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha-3/2}\, o\,(\log n)\right]$$

$$=o\left\{\log\frac{1}{1-x}\right\}$$

अन्त में,

$$I_3=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha}\int_{\pi-1/n}^{\pi}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}|\psi(\phi)|\,P_n^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)\,d\phi\right]$$

$$=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha}\int_{0}^{1/n}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left\{\sin\frac{\phi}{2}\right\}^{2\beta+1}f\,|(\cos\phi)-A|\right.$$
$$\left.\cdot\, P_n^{(\beta,\alpha+1)}(\cos\phi)\,d\phi\right]$$

$$=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha+\beta}\int_{0}^{1/n}\phi^{2\beta+1}|\,f(-\cos\phi)-A|\,d\phi\right]$$

यदि प्रतिबन्ध (2.3) सही है तो प्रमेयिका 3 से,

$$I_3=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha+\beta}\int_{0}^{1/n}\phi^{\beta-1/2}\,\phi^{\beta+3/2}\,|\,f(-\cos\phi)-A|\,d\phi\right]$$

$$=O\left[\Sigma\, x^n\, n^{\alpha-3/2}\int_{0}^{1/n}\phi^{\beta-1/2}|\,f(-\cos\phi)-A|\,d\phi\right]$$

$$=o\left\{\Sigma\, x^n\, n^{\alpha-3/2}\right\}$$

$$=o\left\{\log\frac{1}{1-x}\right\}$$

क्योंकि $\alpha<-\frac{1}{2}$

यदि $f(x)$, x का समाकलन है, तो

$$I_3 = O\left[\Sigma x^n n^{\alpha+\beta} \int_0^{1/n} \phi^{2\beta+1} |\psi(\phi)| \, d\phi\right]$$

$$= o\left\{\log \frac{1}{1-x}\right\}$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० ए० एन० सिंह का आभारी है जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. बोरवाइन, डी०, जर्न० लन्दन मैथ० सोसा०, 1958, 33, 212-220.
2. गुप्ता, डी० पी०, युनि० इला० स्टडीज, 1970, 2, (एन० एस०), 185-190.
3. गुप्ता, डी० पी०, डी० एस-सी० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1970.
4. जेगो, जी०, Orthogonal Polynomials, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

फूरिये-जैकोबी श्रेणी की परम नारलुंड संकलनीयता

एस० एन० अग्रवाल

गणित विभाग, सी० एम० दुबे स्नातकोत्तर महाविद्यालय, बिलासपुर

तथा

एस० के० वर्मा

गणित विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, बिलासपुर

[प्राप्त—जुलाई 10, 1984]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में अन्तराल $[-1, 1]$ के बिन्दु $x=+1$ पर फूरिये-जैकोबी श्रेणी की परम नारलुंड संकलनीयता पर विचार किया गया है। हमारा प्रमेय वर्मा[7] के समजात है और चौधरी[1] के प्रमेय को अपने में समाविष्ट करता है।

Abstract

Absolute Nörlund summability of Jacobi series. *By* S. N. Agrawal and S. K. Verma, Department of Mathmematics, Government Postgraduate College, Bilaspur (M. P.).

In the present paper we discuss absolute summablity $|N, q_n|$ at end point $x=+1$ of the interval $[-1, 1]$ of Fourier-Jacobi series. Our theorem is analogus to result of Varma[7] and includes the result of Choudhary[1].

1. माना कि $\Sigma\, a_n$ एक अनन्त श्रेणी हैं जिसके आंशिक योगों का अनुक्रम $\{S_n\}$ है। श्रेणी को नारलुंड संकलनीयता (Nörlund-Summability) से योज्य कहा जाता है[3] यदि

$$t_n=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=0}^{n} q_{n-k}\, S_k \to S \text{ जब } n\to\infty$$

जहाँ $\{q_n\}$ वास्तविक या मिश्रित संख्याएं हैं और

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k \text{ तथा } q_{-k} = Q_{-k} = 0 \text{ व } Q_n \neq 0$$

यदि श्रेणी $\Sigma\ |t_n - t_{n-1}| < \infty$

तो श्रेणी $\Sigma\ a_n$ को परमसंकलनीय $|N, q_n|$ कहा जाता है जिसे हम $\Sigma\ a_n \in |N, q_n|$ से दर्शाते हैं।

2. माना कि $f(x)$ लेबेस्क मापनीय फलन है जो अंतराल $-1 \leqslant x \leqslant 1$ के लिए परिभाषित है। $f(x)$ के संगत जैकोबी श्रेणी

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.1}$$

द्वारा दी जाती है जहाँ

$$a_n = \frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+1)\ \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\ \Gamma(n+\beta+1)}$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}\ (1+t)^{\beta} f(t)\ P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\, dt \tag{2.2}$$

श्रेणी (2.1) परागोलीय श्रेणी (Ultra spherical series) में समानीत हो जाता है यदि $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ और लेगेण्ड्र श्रेणी (Legendre-series) में यदि $\alpha = \beta = 0$.

$x = \cos\theta$ तथा $\alpha = \beta = -1/2$ रखने पर (2.1) श्रेणी अन्तराल $(0, \pi)$ में फलन $f(\cos\theta)$ त्रिकोणमिति श्रेणी में बदल जाती है। फूरिये श्रेणी की परम नारलुंड संकलनीयता हेतु हाल ही में इजुमी तथा इजुमी[4] के प्रमेय का सार्वीकरण वर्मा[7] ने किया है। प्रस्तुत पत्र में हमने वर्मा[7] के परिणाम के समजात परिणाम ज्ञात किया है। विशिष्ट स्थिति में प्रस्तुत पत्र का प्रमेय, चौधरी[1] के निम्नलिखित प्रमेय को अपने में निहित किये रहता है।

प्रमेय[1]

यदि $\{q_n\}$ धनात्मक अचरों का एक अनुक्रम है और $\{q_n - q_{n-1}\}$ एकदिष्ट और परिसीमित अनुक्रम है तथा

$$\sum_{n=2} \frac{n^{\alpha+3/2}}{Q_n (\log n)^{\Delta}} < \infty,\ \Delta > 0 \tag{2.3}$$

और

$$\int_0^t |F(\phi)|\, d\phi = O\left\{\frac{t^{\alpha+3/2}}{(\log 1/t)^{\Delta}}\right\} \text{ ज्यों-ज्यों } t \to +0 \tag{2.4}$$

तो बिन्दु $x=1$ पर श्रेणी (2.1) संकलनीय $|N, q_n|$ है बशर्ते $\alpha \geqslant -1/2, \beta > -1/2$ और एंटीपोल प्रतिबन्ध

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{\beta/2-3/4} |f(x)| \, dx < \infty \tag{2.5}$$

जहां b एक नियत अचर है, तथा

$$F(\phi) = \Big[f(\cos \phi) - A \Big] \Big(\sin \frac{\phi}{2} \Big)^{2\alpha+1} \Big(\cos \frac{\phi}{2} \Big)^{2\beta+1} \tag{2.6}$$

हम निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय

यदि $\{q_n\}$ धनात्मक अचरों का एक अनुक्रम है तथा $\{q_n - q_{n-1}\}$ एकदिष्ट और परिसीमित अनुक्रम हो तथा

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha+3/2}}{\{Q_n\}^{1+\triangle}} < \infty, \ \triangle > 0 \tag{2.7}$$

और

$$\int_0^t |F(\phi)| \, d\phi = O\left(\frac{t^{\alpha+3/2}}{\{Q(1/t)^{\triangle}} \right) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to +0 \tag{2.8}$$

तो बिन्दु $x=1$ पर श्रेणी (2.1) $\epsilon \, |N, q_n|$ बशर्ते $\alpha \geqslant -1/2, \beta > -1/2$ और ऐंटीपोल प्रतिबन्ध (2.5) सन्तुष्ट होता हो।

3. प्रमेय को सिद्ध करने के लिये निम्न प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

चौधरी [1] पृ० (172-173) यदि

$$K_n(\theta) = 2^{\alpha+\beta+1} \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k^{(\alpha+1, \beta)} (\cos \theta)$$

जहाँ

$$\lambda_k = \frac{2^{-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)}$$

तो

$$K_n(\theta) = O(n^{2\alpha+3}) \ 0 \leqslant \theta \leqslant 1/n \text{ के लिए} \tag{3.1}$$

$$K_n(\theta) = O\left[n^{\alpha+1/2} \left\{ \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-5/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2} + \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-5/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-3/2} \right\} \right]$$

$$1/n \leqslant \theta \leqslant \pi - 1/n \text{ के लिए} \tag{3.2}$$

तथा

$$K_n(\theta)=O(n^{\alpha+\beta+2}),\ \pi-1/n\leqslant\theta\leqslant\pi \text{ के लिए} \tag{3.3}$$

प्रमेयिका 2

माना कि

$$S_n^{(1)}=\sum_{k=0}^{n} S_k.\ \text{यदि } \{q_n\}$$

धनात्मक अचरों का एक अनुक्रम है और $\{q_n-q_{n-1}\}$ एकदिष्ट तथा परिसीमित अनुक्रम हो तथा

$$\Sigma\, |S_n^{(1)}|/Q_{(n)}<\infty$$

तो श्रेणी $\Sigma\, a_n \epsilon\, |N, q_n|$ होगी ।

उपपत्ति के लिए [हिसयांग [2] पृ० 253] देखें ।

प्रमेयिका 3

चौधरी [1] पृ० 174

एंटीपोल प्रतिबन्ध (2.5) निम्नलिखित प्रतिबन्धों के तुल्य है ।

$$\int_{\substack{-1\\ a=\cos b}}^{\pi} |f(\cos\theta)-A| \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta-1/2} d\theta<\infty \tag{3.4}$$

या

$$\int_0^{1/n} t^{\beta-1/2}\, |f(-\cos t)-A|\, dt<\infty \tag{3.5}$$

प्रमेयिका 4

यदि $S_n^{(1)}$ (θ) श्रेणी (2.1) का प्रथम क्रम का nवाँ चिजारों योग हो तो प्रतिबन्ध (2.8) तथा एंटीपोल प्रतिबन्ध (2.5) के सन्तुष्ट होने पर

$$S_n^{(1)}(\theta)=O\left[\frac{n^{\alpha+3/2}}{\{Q(1/n)\}^{\Delta}}\right] \tag{(3.6}$$

उपपत्ति

आब्रेश्कॉफ[5] तथा राव[6] का अनुसरण करने पर श्रेणी (2.1) के बिन्दु $x=+1$ पर प्रथम क्रम के nवें चिजारों योग निम्नलिखित सूत्र से दिये जावेगें ।

$$S_n^{(1)}(\theta)=\sum_{k=0}^{n}\{S_k(1)-A\}$$

$$=\int_0^{\pi} F(\theta)\, K_n(\theta)d\theta.$$

प्रमेयिका को सिद्ध करने के लिए हमें बताना होगा कि

$$S_n^{(1)}(\theta)=\sum_{k=0}^{n}\{S_k(1)-A\}$$

$$=O\left[\frac{n^{\alpha+3/2}}{\{Q(1/n)\}^{\triangle}}\right]$$

लिखें

$$S_n^{(1)}(\theta)=\left(\int_0^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}\right) F(\theta)\, K(\theta)\, d\theta$$

जहाँ δ एक उपयुक्त चुना हुआ छोटा अचर है।

$$=I_1+I_2+I_3+I_4, \tag{3.7}$$

I_1 में (3.1) का उपयोग करने पर

$$|I_1|=O(n^{2\alpha+3})\int_0^{1/n} |F(\theta)|\, d\theta$$

$$=O(n^{2\alpha+3})\left[\frac{n^{-\alpha-3/2}}{\{Q(n)\}^{\triangle}}\right] \text{ (2.8) से}$$

$$=O\left[\frac{n^{\alpha+3/2}}{\{Q(n)\}^{\triangle}}\right] \tag{3.8}$$

I_2 में (3.2) का उपयोग करने पर

$$|I_2|=O(n^{\alpha+1/2})\left[\int_{1/n}^{\delta} |F(\theta)|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2} d\theta\right.$$

$$\left.+\int_{1/n}^{\delta} |F(\theta)|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-3/2} d\theta\right]$$

$$=|I_{2\cdot1}|+|I_{2\cdot2}|$$

अब

$$|I_{2\cdot1}|=O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\delta} |F(\theta)|\,\theta^{-\alpha-5/2}\, d\theta$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})\left[\left\{\theta^{-\alpha-5/2}\frac{\theta^{\alpha+3/2}}{\{Q(1/\theta)\}^{\triangle}}\right\}_{1/n}^{\delta}+\int_{1/n}^{\delta}\theta^{-\alpha-7/2}\frac{\theta^{\alpha+3/2}}{\{Q(1/\theta)\}^{\triangle}}d\theta\right]$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})+O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}\,n}{(Q(n))^{\triangle}}\right)+O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/n}^{\delta}\frac{d\theta}{\theta^{2}\{Q(1/\theta)\}^{\triangle}}$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})+O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\triangle}}\right)+O(n^{\alpha+1/2})\int_{1/\delta}^{n}\frac{ds}{(Q(s))^{\triangle}}$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})+O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\triangle}}\right)+O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\triangle}}\right)$$

अतएव

$$|I_{2\cdot1}|=O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\triangle}}\right)$$

उसी प्रकार

$$|I_{2\cdot2}|=O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\triangle}}\right)$$

तब

$$|I_2|=O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\triangle}}\right) \tag{3.9}$$

अब एंटीपोल प्रतिबन्ध (3.4) का उपयोग करते हुए तथा I_2 के सदृश्य विवेचना करते हुए

$$|I_3|=O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{\{Q(n)\}^{\triangle}}\right)\text{ प्राप्त कर लेंगे} \tag{3.10}$$

अन्त में (3.3) से

$$|I_4|=O(n^{\alpha+\beta+2})\int_{\pi-1/n}^{\pi}|F(\theta)|\,d\theta$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+2})\int_{\pi-1/n}^{\pi}|f(\cos\theta)-A|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2\beta+1}d\theta$$

$$=O(n^{\alpha+\beta+2})\int_{0}^{1/n}|f(\cos\theta)-A|\,Q^{2\beta+1}\,d\theta$$

$$=O(n^{\alpha+1/2})\int_{0}^{1/n}|f(\cos\theta)-A|\,Q^{\beta-1/2}\,d\theta$$

$=O(n^{\alpha+1/2})$ एंटीपोल प्रतिबंध (3.5) से

$$=O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(\theta)^{\triangle}}\right) \tag{3.11}$$

अतएव (3.7), (3.8)......(3.11) को मिलाने पर

$$S_n^{(1)}(\theta) = O\left(\frac{n^{\alpha+3/2}}{(Q(n))^{\Delta}}\right)$$

4. प्रमेय की उपपत्ति

उपरोक्त प्रमेयिका के अनुसार

$$\sum_{v=n}^{\infty} \frac{S^{(1)}{}_v(\theta)}{Q(v)} = O(1) \sum_{v=n}^{\infty} \frac{v^{\alpha+3/2}}{(Q(v))^{1+\Delta}} = O(1)$$

प्रमेय के प्रतिबन्ध (2.7) के अनुसार

अब प्रमेयिका 2 से प्रमेय पूर्ण रूप से सिद्ध हुआ ।

निर्देश

1. चौधरी, आर० एस०, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1976, **19**, 169-177.
2. हिस्यांग, एफ० सी०, **जर्न० आस्ट्रे० मैथ० सोसा०**, 1967, **7**, 251-256.
3. नारलुंड, एन० ई०, **लन्डसयुनिर्वासिटिट्स आर्सक्रफ्ट**, 1919, **16**, 1-19.
4. इजुमी, एम० तथा इजुमी एस०, **बुले० आस्ट्रे० मैथ० सोसा०**, 1970, **3**, 111-123.
5. आब्रेश्कॉफ, एन०, **युनिर्वासिटी डे सोफिया**, 1939, **32**,39-135.
6. राव, एच०, **जर्न० रेनी० एग्वी० मैथ०**, 1929, **16**, 237-254.
7. वर्मा, एस० के०, **इंडियन जर्नल प्योर अप्लाइड मैथ्स०**, 1982, **12**, 1439-1446.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

मुर्गी के अण्डों में क्रोमियम की उपस्थिति

कु० शिखा सक्सेना, संजय तिवारी तथा बी० एम० एल० तिवारी
रसायन विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवाँ (म० प्र०)

[प्राप्त—अगस्त 9, 1984]

सारांश

अपशिष्ट क्रोम-चमड़े को खाने वाली मुर्गियों के अण्डों में क्रोमियम तत्व पाया गया है। इससे अण्डों का स्वाद कषैला एवं अप्रिय हो जाता है।

Abstract

Presence of chromium in hen eggs. *By* Km. Shikha Saxena, Snjay Tiwari and B. M. L. Tiwari, Department of Chemistry, Government Science College, Rewa (M. P.).

Chromium has been detected in the egg of hens accepting waste chrome leather as food. Due to this the eggs have bad unpleasant taste.

एक खुले कुक्कुट फार्म से प्राप्त ताजे अण्डों में कषैला एवं अप्रिय स्वाद मिलता था। साथ ही हल्की सी दुर्गन्ध भी आती थी। इस समस्या के कारण फार्म से प्राप्त अण्डों का विक्रय एवं उपयोग घटता गया। सामान्यत: अच्छे अण्डों में Na, K, Ca, Mg, Fe, S, Zn, Mn, Cl_2, P आदि तत्वों की उपस्थिति पायी जाती है। साथ ही अण्डों से प्राप्त द्रव पदार्थों का औसत पी०एच मान 7.6 होता है। जब अण्डों का pH-मान 8, 9 या इससे अधिक हो जाता है तो अण्डों का स्वाद खराब हो जाता है।[1-2] इस आधार पर विचार किया गया कि उपर्युक्त खराब स्वाद एवं दुर्गन्ध युक्त अण्डों का विभिन्न खनिज अंशों हेतु विश्लेषण एवं द्रव पदार्थ का पी०एच मापन किया जाये।

प्रयोगात्मक

सभी प्रयुक्त रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे। पी० एच मापन तोशनीवाल पी० एच मीटर (सी०-एल०-49) द्वारा किया गया।

पी० एच मापन : एक संदर्भित अण्डे के द्रव पदार्थ को बीकर में लेकर आसुत जल के साथ कांच की छड़ द्वारा अच्छी तरह विलोडित किया गया। इस विलयन का पी एच मान 6.95 पाया गया। इससे स्पष्ट होता है कि संदर्भित अण्डों में पी०एच के कारण स्वाद खराब नहीं होता होगा।

खनिज अंशों की भस्म प्राप्त करना : सिलिका बेसिनों में संदर्भित अण्डों (800 ग्रा०) को तोड़ कर बुन्सन ज्वाला द्वारा धीरे-धीरे गर्म किया गया। यह ध्यान दिया गया कि दहन के समय सिलिका बेसिन में लिया गया पदार्थ आग न पकड़े। जब धूम उठने बन्द हो गये और पदार्थ का रंग काला हो गया तो सिलका बेसिनों को वैद्युत-मफल भट्ठी में 600 (+25)°C पर लगभग 60 मिनट तक गर्म किया गया। ठंडा करने पर भूरे-श्वेत रंग की भस्म (20.0562 ग्रा०) प्राप्त हुई जिसे निर्वात जल-शोषित्र में संगलित $Ca\ Cl_2$ के ऊपर एकत्र कर लिया गया।

खनिज अंशों का विलयन : प्राप्त खनिज अंश भस्म को एक पाइरेक्स बीकर में लेकर पहले आसुत-जल (50 मिली०) से नम कर लिया गया। इसके बाद सान्द्र HCl (50 मिली०) एवं सान्द्र HNO_3 (25 मिली०) मिलाकर भस्म को लगभग 30 मिनट तक अच्छी तरह उबाला गया। प्राप्त आसुत जल से तनु बना कर फिल्टर पत्र-42 की सहायता से छान लिया गया तथा अवशेष पदार्थ को गर्म आसुत जल से अच्छी तरह धोकर, धोवनों को भी विलयन के साथ एकत्र कर लिया गया। अवशेष रूप में जो पदार्थ प्राप्त हुआ उसमें सल्फर तत्व की उपस्थिति का संकेत मिलता है।[3]

विश्लेषण: प्राप्त विलयन एवं धोवनों के आयनों को उबालकर लगभग 100 मिली० कर लिया गया। इसमें (लगभग 3 ग्रा०) NH_4Cl मिलाकर गर्म किया गया और फिर जिर्कोनियम नाइट्रेट अभिकर्मक द्वारा जिर्कोनियम फास्फेट अवक्षेपित कर लिया।[4] इस अवक्षेप को छान कर अलग कर दिया तथा छनित में लोहा, क्रोमियम, एवं मैंगनीज के लिए परीक्षण किये गये।

आयरन : छनित के प्रथम भाग से डाइ सोडियम, 1, 2 डाइ हाइड्रॉक्सी बेन्जीन-3, 5-डाइ सल्फोनेट द्वारा परीक्षण[5] करनें पर गुलाबी रंग का विलयन प्राप्त हुआ जो Fe^{3+} की उपस्थिति को प्रमाणित करता है।

क्रोमियम : छनित के दूसरे भाग को $K_2S_2O_8$ की सहायता से ऑक्सीकृत करनें के बाद सोडियम ऐजाइड से क्रिया करायी गयी और फिर डाइफेनिल कार्बाजाइड अभिकर्मक द्वारा CrO_4^{--} का परीक्षण किया गया।[6] इससे नीले-बैगनी रंग का विलयन प्राप्त हुआ जो प्रमाणित करता है कि अण्डों में क्रोमियम तत्व [कम से कम 0.25 μg] उपस्थित है।

Ca^{2+}, Mg^{2+}, Na^+ तथा K^+ आदि के लिये सामान्य विश्लेषण द्वारा परीक्षण करने पर वे उपस्थित पाये गये।

परिणाम तथा विवेचना

उपर्युक्त विश्लेषण से क्रोमियम की उपस्थिति का प्रमाणीकरण हो जाने से प्रश्न उपस्थित हुआ कि कुक्कुटों को प्राप्त होने वाले आहार में क्रोमियम तत्व होना चाहिये। खोज करने पर ज्ञात हुआ कि

संदर्भित अण्डों को देने वाली मुर्गियाँ, फार्म के पास के पोखर से अक्सर अपना भोजन प्राप्त करती थीं जिसमें मोची लोगों में अपशिष्ट क्रोम-चमड़ा डाल रखा था। इस सड़े-गले चमड़ों को एकत्र कर, सूखाकर, पूर्ववर्णित विधि से भस्म एकत्र की गई तथा क्रोमियम का आकलन किया गया।[7-8] प्राप्त परिणामों से अपशिष्ट चमड़े के नमूनों में प्रति किलो 7-12 ग्रा० क्रोमियम उपस्थित पाया गया। इन चमड़ों के नमूनों को सुखाकर, चूर्ण बनाकर, चूर्ण को मुर्गियों के आहार के साथ लगभग 15% के अनुपात में मिला दिया गया। पाँच-छः दिनों बाद इस मिश्रित आहार को खाने वाली मुर्गियों के अण्डों में हल्के से अधिक मात्रा तक कषैलापन, अप्रिय स्वाद एवं कुछ दुर्गन्ध पायी गयी। जिन मुर्गियों को उपर्युक्त आहार नहीं दिया गया था, उनके अण्डों में संदर्भित खराबी नहीं मिली। इस तथ्य से स्पष्ट हो जाता है कि अपशिष्ट क्रोम-चमड़े को खाने से मुर्गीयाँ खराब स्वाद एवं दुर्गन्धयुक्त अण्डे देती हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण इस कार्य में सहायता पहुँचाने के लिये डा० एस० सी० खरे, संभागीय पोल्ट्री-निरीक्षक, रीवाँ के आभारी हैं।

निर्देश

1. फेरान, डब्ल्यू० आर०, An introduction to Biochemistry विलयन हेनेमन, 1949.
2. अचैजा, के० टी०, इन्डि० पोल्ट्री० इन्ड० इयरबुक 1976-77, पृष्ठ-60-61.
3. सत्य प्रकाश तथा तिवारी, रामदास, A Text Book of Analytical Chemistry स्टूडेन्टफ्रेन्डस; 1963, पृष्ठ 281.
4. वोगल, ए० आई०, A Text Book of Macro and Semimicro Qualitative Inorganic Analysis", लांगमेन्स, 1960, पृष्ठ 455, 611.
5. फीगल, फ्रिट्ज, Spot Test, एल्सविर, 1954, पृष्ठ-157.
6. वही, वही, पृष्ठ 161 एवं 317.
7. वोगल, ए० आई०, A Text Book of Quantitative Analysis, लांगमेन्स, 1961, पृष्ठ 520.
8. तिवारी, शीला एवं तिवारी, बी० एम० एल०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०** 1976, **53**, 1176.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

हाइपर ज्यामितीय फलन $_2F_2$ वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

बी० के० जोशी

गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरिंग महाविद्यालय, बिलासपुर

[प्राप्त—नवम्बर 10, 1984]

सारांश

हाइपरज्यामितीय फलन $_2F_2$ की अष्टि वाले एक समाकल समीकरण का हल प्रस्तुत किया गया है। इस एकीकृत विलोमन द्वारा कई शोधकर्ताओं के परिणाम प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा प्राप्त किये जा सकते हैं।

Abstract

Inversion of an integral equation involving hypergeometric function $_2F_2$. *By* B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government Engineering College, Bilaspur.

An integral equation involving hypergeometric function $_2F_2$ as its kernel has been inverted. The unified solution presents the results of many invesftigators as special cases.

1. प्रस्तावना

गत कुछ वर्षों में चेबीशेव बहुपदी[1], लेगेंड्र बहुपदी[2], सरल लागेर बहुपदी[3], सार्वीकृत लागेर बहुपदी[4], व्हिटेकर फलन[5] आदि अष्टि वाले समाकल परिवर्तों के लिये शोध पत्र प्रकाशित हुये हैं। इसी कडी में जगेतिया[6] द्वारा हाइपरज्यामितीय फलन $_2F_2$ का प्रयोग कर एक समाकल समीकरण का हल प्रस्तुत किया गया है। इसी अष्टि को प्रयोग करते हुये रुसिया तथा गुप्ता[7] ने समाकल समीकरण

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{b^r\,(r+a)\,!}{r\,!\;a\,!\;(a+m+r)\,!} \int_0^t e^{(\lambda-b)(t-u)}\,(t-u)^{\alpha+m+r}$$

$$\times\, {}_2F_2 \begin{bmatrix} -n,\, a+r+1; & \\ & k(t-u) \\ a+1,\, a+m+r+1; & \end{bmatrix} g(u)\, du = f(t) \qquad (1.1)$$

के विभिन्न चार विलोमन तथा दीक्षित[9] ने और तीन हल दर्शाये हैं।

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य (1.1) का एक ऐसा एकीकृत हल प्रस्तुत करना है जिसमें प्राचलों के विशिष्टीकरण द्वारा अधिकांश हल विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त हो जावें ।

2. वांछित परिणाम

फलन $f(t)$ का लैप्लास परिवर्त

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = F(p),\ Re\, p>0$$

है तथा इस सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में

$f(t) \doteqdot F(p)$ द्वारा व्यक्त करेंगे ।

एर्डेल्यी [10 p. 141, 129, 144, 175] से निम्नलिखित फलन ज्ञात हैं जिनका आगे उपयोग किया जावेगा

$$\int_0^t f_1(u)\, f_2(t-u)\, du \doteqdot F_1(p)\, F_2(p) \tag{2.1}$$

जहाँ $f_1(t) \doteqdot F_1(p)$ और $f_2(t) \doteqdot F_2(p)$

$$(p+b)^{-m} \doteqdot \frac{t^{m-1}\, e^{-bt}}{\Gamma(m)},\ Re\, m>0,\ Re\, p>-Re\, b. \tag{2.2}$$

$$f^n(t) \doteqdot p^n F(p)$$

बशर्ते

$$f(0)=f^1(0)=f^{11}(0)= \ldots\ldots =f^{n-1}(0)=0 \tag{2.3}$$

$$t^\alpha\, e^{\lambda t}\, L_n^{(\alpha)}(k\, t) \doteqdot \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n\,!}\, \frac{(p-k-\lambda)^n}{(p-\lambda)^{\alpha+n+1}}$$

$$Re\, \alpha>-1,\ Re\,(p-\lambda)>0 \tag{2.4}$$

एर्डेल्यी [11, p. 192 (50)] द्वारा ज्ञात है

$$\int_0^t u^{\lambda-1}\, L_n^{(\alpha)}(\beta\, u)\, (t-u)^{\mu-1}\, du = \frac{\Gamma(\mu)\, \Gamma(\alpha+n+1)\, \Gamma(\lambda)}{n\,!\, \Gamma(\alpha+1)\, \Gamma(\lambda+\mu)}\, t^{\lambda+\mu-1}$$

$$\times {}_2F_2 \left[\begin{matrix} -n,\ \lambda; \\ \alpha+1,\ \lambda+\mu; \end{matrix}\ \beta\, t\right] \tag{2.5}$$

3. प्रमेय

यदि

(i) $f^{\beta_1+\beta_2+m}(t)$ प्रभागशः $0 \leqslant x < x_1 < \infty$ में संतत हैं और

$$f(0)=f^1(0)= \ldots =f^{\beta_1+\beta_2+m-1}f(0)=0,$$

(ii) $\beta_1, \beta_2, m, n, \alpha$ घन पूर्णांक तथा R संमिश्र अचर हैं जहाँ

$$n+\alpha+1 \geqslant \beta_1, \; n+\beta_2 \geqslant 1$$

तो समाकल समीकरण (1.1) का निम्नलिखित हल होगा

$$g(t)=\frac{(n+\alpha-\beta_1+1)\,!}{(n+\beta_2-1)\,!}\int_0^t (t-u)^{\beta_1+\beta_2-\alpha-2}\, e^{(\lambda+k)(t-u)}$$

$$\times L\begin{Bmatrix} n+\beta_2 \\ n+\alpha-\beta_1+1 \end{Bmatrix}(k\,(u-t))\left\{(D-\lambda)^{\beta_1}\,(D-k-\lambda)^{\beta_2}\,(D+b-\lambda)^m, f(u)\right\} du \qquad (3.1)$$

बशर्ते कि (1.1) के वाम पक्ष का अस्तित्व हो।

उपपत्ति

(2.2) तथा (2.4) में (2.1) का उपयोग करने पर

$$\frac{(p+b)^{-m}\,(p-k)^n}{p^{\alpha+n+1}} \doteqdot \frac{n\,!\, e^{-bt}}{\lceil (\alpha+n+1) \lceil m}\int_0^t e^{bu}\, u^{\alpha}\, L_n^{\alpha}\,(ku)\,(t-u)^{m-1}\, du$$

अब e^{bu} का विस्तार करने, समाकलन का क्रम बदलने तथा (2.5) का उपयोग करने पर

$$\frac{(p+b)^{-m}\,(p-k)^n}{p^{\alpha+n+1}} \doteqdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b^r\, e^{-bt}\,(r+\alpha)\,!}{r\,!\;\alpha\,!\,(\alpha+m+r)\,!}\; t^{m+\alpha+r}$$

$$\times {}_2F_2\begin{bmatrix} -n,\, \alpha+r+1; & \\ & kt \\ \alpha+1,\, \alpha+m+r+1; & \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

यदि $f(t) \doteqdot F(p)$ और $g(t) \doteqdot G(p)$ हो तो (1.1) में लैप्लास परिवर्त का संप्रयोग तथा (3.2) का उपयोग करने और परिणाम को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=\frac{(p-\lambda)^{n+\alpha-\beta_1+1}}{(p-k-\lambda)^{n+\beta_2}}\,(p-\lambda)^{\beta_1}\,(p-k-\lambda)^{\beta_2}\,(p+b-\lambda)^m\, F(p) \qquad (3.3)$$

(3.3) में (2.1) और (2.4) के प्रकाश में लैप्लास विलोमन से (3.1) की प्राप्ति होती है।

उपप्रमेय

(i) यदि (1.1) और (3.1) में $\beta_1=2\alpha-\rho+2$, $\beta_2=0$ रखें तथा

$$L_n^{\alpha}(k\,t)=L_n^{(\alpha-n-1)}(k\,t) \tag{3.4}$$

का उपयोग करें तो दीक्षित[9] द्वारा विवेचित प्रमेय (3.1) प्राप्त होता है।

(ii) $\beta_1=\alpha$, $\beta_2=\alpha-\rho+2$ रखने और (3.4) का उपयोग करने पर दीक्षित[9] द्वारा प्रस्तुत परिणाम (3.2) प्राप्त हो जाता है।

(iii) (3.4) के प्रकाश में $\beta_1=\alpha-\rho+1$; $\beta_2=\alpha+1$ रखने पर दीक्षित[9] का फल (3.3) सीधा प्राप्त होता है।

(iv) रूसिया तथा गुप्ता[7] द्वारा स्थापित प्रमेय (4.1), (4.9) एवं (4.17) को प्राप्त करने हेतु क्रमश: $\beta_2=0$, $\beta_1=\alpha+n+1$; $\beta_1=\alpha+1$; $\beta_2=\alpha+m+1$ तथा $\beta_1=\alpha+2$, $\beta_2=0$ रखना पड़ेगा।

प्राचलों n, α आदि के विशिष्टीकरण से हमें खण्डेकर[4], रूसिया[8] आदि द्वारा स्थापित अन्य परिणाम भी प्राप्त हो सकते हैं।

निर्देश

1. टा, ली, **प्रोसी० अमे० मेथ० सोसा०**, 1960, **11**, 290.
2. बुशमेन, आर० जी०, **अमे० मेथ० मन्थली**, 1962, **69**, 288.
3. विडर, डी०, **अमे० मेथ० मन्थली**, 1963, **70**, 291.
4. खाण्डेकर, पी० आर०, **जर्न० डी० मेथ० प्योर एप्ला०**, 1965, **44**, 195.
5. सिंह, सी०, **मेथ० जैपोनिका०** 1968, **13**, 1, 74.
6. जगेतिया, आर० एन०, **प्रोसी० नेश० एके० साइन्स इन्डिया**, 1969, **39 A**, 323.
7. रूसिया, के० सी० तथा गुप्ता, एच० एल०, **जर्न० एम० ए० सी० टी०**, 1963, **6**, 111.
8. रूसिया, के० सी०, **मेथ० जैपोनिका**, 1966, **2**, 1.
9. दीक्षित, एल० ए०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**' 1977, **20(2)**, 183.
10. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग 1, मेकग्राहिल, 1954.
11. वही, वही, भाग 2, मेकग्राहिल, 1954।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

सार्वीकृत स्ट्रूव फलन और इसका आवृति सूत्र

राजेन्द्र प्रसाद सिंह

पी० एन० कालेज, परसा (सारण), बिहार

[प्राप्त—सितम्बर 6, 1984]

सारांश

सार्वीकृत स्ट्रूव फलन, $H^{\lambda,\mu}_{\nu,\alpha}(z)$ को

$$H^{\lambda,\mu}_{\nu,\alpha}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1^r)\,(z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)},$$

जहाँ $\lambda>0$, $\mu>0$ और α एक यादृच्छ प्राचल है।

सूत्र द्वारा परिभाषित करते हुये $H^{\lambda,\mu}_{\nu,\alpha}(\alpha)$ द्वारा प्रदर्शित श्रेणियों के चरम अभिसरण एवं उक्त फलन के कतिपय आवृति सूत्रों का अध्ययन प्रस्तुत शोध-निवन्ध का विषय है।

Abstract

Generalized Struve's function and its recurrence equation. *By* Rajendra Prasad Singh, P. N. College, Parsa (Saran), Bihar.

If we define the generalized Struve's function $H^{\lambda,\mu}_{\nu,\alpha}(z)$ by the formula

$$H^{\lambda,\mu}_{\nu,\alpha}(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$\lambda>0$, $\mu>0$ and α is an arbitrary parameter.

Then the subject of this paper is to discuss the absolute convergence of the series represented by $H^{\lambda,\mu}_{\nu,\alpha}(z)$ and to find some recurrence relations of the same functions.

1. विषय-प्रवेश

हम जानते हैं कि स्ट्रूव फलन को

$$H_v = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\Gamma(v+r+3/2)}$$

श्रेणी द्वारा परिभाषित किया जाता है। यह सत्य है कि स्ट्रूव ने इस प्रकार के शून्य तथा इकाई घातांक वाले फलनों पर ही शोध किया। कुछ हद तक सीमान[4] तथा वाकर[1] ने सार्वफलन के गुणों की परीक्षा की है। स्ट्रूव के सार्वीकृत फलन $H_v^{\lambda}(z)$ को भौमिक[3] ने निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित किया है

$$H_v^{\lambda}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(r+3/2)\,\Gamma(v+\lambda r+3/2)}, \ \lambda>0$$

स्ट्रूव के सार्वीकृत फलन $H_{v,\alpha}^{\lambda,\mu}(z)$ को मैंने निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित किया है

$$H_{v,\alpha}^{\lambda,\mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(v+\lambda r+3/2)}$$

$\lambda>0$, $\mu>0$ और α श्रेणी में यादच्छिन है।

प्रस्तुत शोध-निबन्ध में $H_{v,\alpha}^{\lambda,\mu}(z)$ द्वारा अंकित श्रेणी के चरम-अभिसरण की विवेचना है और इसी फलन के कतिपय आवृत्ति-सूत्रों की खोज भी है।

2. $H_{v,\alpha}^{\lambda,\mu}(z)$ द्वारा अंकित श्रेणी का चरम-अभिसरण

माना कि U_r निम्नलिखित श्रेणी का सार्व पद है

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{v+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(v+\lambda r+3/2)}$$

तब

$$\left|\frac{U_r}{U_{r+1}}\right| = \frac{4}{|z|}\left|\frac{\Gamma(\mu r+\mu+\alpha)\,\Gamma(v+\lambda r+\lambda+3/2)}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(v+\lambda r+3/2)}\right|$$

r के उच्च मानों के लिये

$$\Gamma(v+\lambda r+3/2+\lambda) \sim C_1 e^{-\lambda r}(v+\lambda r+\lambda+3/2)^{v+\lambda r+\lambda+1}$$

$$\Gamma(v+\lambda r+3/2) \sim C_2 e^{-\lambda r}(v+\lambda r+3/2)^{v+\lambda r+1}$$

$$\Gamma(\mu r+\mu+\alpha) \sim C_3 e^{-\mu r}(\mu r+\mu+\alpha)^{\mu r+\mu+\alpha-1/2}$$

तथा

$$\Gamma(\mu r+\alpha) \sim C_4 e^{-\mu r}(\mu r+\alpha)^{\mu r+\alpha-1/2}$$

जिसमें C_1, C_2, C_3 तथा C_4 वास्तविक अचर हैं।

अतः r के उच्च मानों के लिये

$$\left|\frac{U_r}{U_{r+1}}\right| \sim \frac{C_1 C_3}{C_2 C_4} \cdot \frac{4}{|z^2|} \frac{r^{\lambda+\mu}\left(\mu+\frac{\mu+\alpha}{r}\right)^{\mu r+\mu+\alpha-1/2}}{\left(\mu+\frac{\alpha}{r}\right)^{\mu r+\alpha-1/2}}$$

$$\cdot \frac{\left(\lambda+\frac{\nu+\lambda+3/2}{r}\right)^{\nu+\lambda r+\lambda+1}}{\left(\lambda+\frac{\nu+3/2}{r}\right)^{\nu+\lambda r+1}}$$

अथवा

$$Lt\left|\frac{U_r}{U_{r+1}}\right| = \infty,$$

श्रेणी $\lambda>0$, $\mu>0$, α याद्दच्छिक है तथा z के निश्चित मानों के लिये।

अतः

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$\lambda>0\mu$, <0, α याद्दच्छिक है तथा $|z|<R$ पर पूर्णतः अभिसरण करती है। और z के पूर्णांक फलन के रूप में भी है। अतः $H_{\nu, \alpha}^{\mu, \lambda}$ (z) के घात का कोई भी व्युत्पन्न z का पूर्णांक फलन होगा।

चूंकि दी हुई श्रेणी पूर्णतः अभिसारी है, अतः पद-प्रति-पद अवकलित तथा समाकलित करके किसी भी विधि से पुनः व्यवस्थित कर सकते हैं।

3. $H_{\nu, \alpha}^{\lambda, \mu}(z)$ के लिये आवृति सूत्र

सूत्र 1

$$H_{\nu, \alpha}^{\lambda, \mu}(z) = \frac{2\lambda\alpha-(2\nu+1)\mu}{2\lambda} H_{\nu, \alpha+1}^{\lambda, \mu}(z)$$

$$+\frac{\mu z}{2\lambda} H_{\nu-1, \alpha+1}^{\lambda, \mu}(z) \tag{3.1}$$

उपपत्ति

हम जानते हैं कि

$$H_{\nu, \alpha}^{\lambda, \mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$=\frac{2\lambda\alpha-2\mu\nu-\mu}{2\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\ (z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha+1)\ \Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$+\frac{\mu}{\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\ (\nu+\lambda r+1/2)\ (z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha+1)\ \Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$=\frac{2\lambda\ \alpha-(2\nu+1)\ \mu}{2\lambda}\ H_{\nu,\ \alpha+1}^{\lambda,\ \mu}\quad(z)$$

$$+\frac{\mu\ z}{2\ \lambda}\ H_{\nu-1,\ \alpha+1}^{\lambda,\ \mu}\ (z)$$

यही अभीष्ट था ।

विशेष दशा

(क) $\alpha=3/2$ तथा $\mu=1$, (3.1) में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$H_{\nu}^{\lambda}\ (z)=\frac{3\lambda-(2\nu+1)}{2\lambda}\ H_{\nu,\ 5/2}^{\lambda}\ \ (z)+\frac{z}{2\lambda}\ H_{\nu-1,\ 5/2}^{\lambda}\ (z)$$

जो $H_{\nu}^{\lambda}\ (z)$ के लिये नया सूत्र है ।

(ख) $\alpha=3/2,\ \mu=1$ तथा $\lambda=1$, (3.1) में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$H_{\nu}\ (z)=(1-\nu)\ H_{\nu,5/2}\ (z)\ +\frac{z}{2}\ H_{\nu-1,\ 5/2}\ (z)$$

जो $H_{\nu}\ (z)$ के लिये नया सूत्र है ।

सूत्र 2

$$H_{\nu,\ \alpha}^{\lambda,\ \mu}\ (z)-\frac{2\lambda\ \alpha-(2\nu+1)\ \mu}{2\lambda}\ H_{\nu,\ \alpha+1}^{\lambda,\ \mu}\ (z)$$

$$=\frac{\mu\ (z/2)^{\nu+1}}{\lambda\ .\ \Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(\nu+1/2)}-\mu/\lambda\ (z/2)^{3-\lambda}\ H_{\nu+\lambda-1,\ \alpha+\mu+1}^{\lambda,\ \mu}\quad(3.2)$$

उपपत्ति

$$H_{\nu,\ \alpha}^{\mu,\ \lambda}\ (z)-\frac{2\lambda\ \alpha-(2\nu+1)\ \mu}{2\lambda}\ H_{\nu,\ \alpha+1}^{\lambda,\ \mu}\ (z)$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\ (z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\ \Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$-\frac{2\lambda\ \alpha-(2\nu+1)\ \mu}{2\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha+1)\ \Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$=\mu/\lambda\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}\,(z/2)^{\nu+2r+3}}{\Gamma(\mu r+\mu+\alpha+1)\ \Gamma(\nu+\lambda r+\lambda+1/2)}$$

$$=\frac{\mu\,(z/2)^{\nu+1}}{\lambda\,\Gamma(\alpha+1)\ \Gamma(\nu+1/2)}-\mu/\lambda\,(z/2)^{3-\lambda}\ H^{\lambda,\,\mu}_{\nu+\lambda-1,\ \alpha+\mu+1}(z)$$

और यही अभीष्ट था ।

विशेष दशायें

(क) $\alpha=3/2$ तथा $\mu=1$, (3.2) में रखने पर

$$H^{\lambda}_{\nu}(z)-\frac{3\lambda-(2\nu+1)}{2\lambda}\ H^{\lambda}_{\nu,\ 5/2}(z)$$

$$=\frac{(z/2)^{\nu+1}}{\lambda\ .\ \Gamma(5/2)\ \Gamma(\nu+1/2)}-\frac{(z/2)^{3-\lambda}}{\lambda}\ H^{\lambda}_{\nu+\lambda-1,\ 7/2}(z)$$

जो $H^{\lambda}_{\nu}(z)$ के लिये एक नया सूत्र है ।

(ख) $\alpha=3/2$, $\mu=1$ तथा $\lambda=1$, (3.2) में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$H_{\nu}(z)-(1-\nu)\ H_{\nu,5/2}(z)=\frac{(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma(5/2)\ \Gamma(\nu+1/2)}-(z/2)^2\ H_{\nu,7/2}(z)$$

जो $H_{\nu}(z)$ के लिये एक नवीन सूत्र है ।

सूत्र 3

$$(d/dz-\nu)\ H^{\lambda,\,\mu}_{\nu,\ \alpha}(z)=\frac{(\mu-2\alpha+2)}{\mu}\ H^{\lambda,\,\mu}_{\nu,\ \alpha}(z)$$

$$+\frac{z^{\nu+1}\ 2^{-\nu}}{\mu\,\Gamma(\alpha-1)\ \Gamma(\nu+3/2)}-\frac{z^{2-\lambda}}{2^{1-\lambda}\mu}\ H^{\lambda,\,\mu}_{\nu+\lambda,\ \alpha+\mu-1}(z) \qquad (3.3)$$

उपपत्ति

$$\left(\frac{d}{dz}-\nu\right)H^{\lambda,\,\mu}_{\nu,\ \alpha}(z)=\frac{d}{dz}\left[\ H^{\lambda,\,\mu}_{\nu,\ \alpha}(z)\right]-\nu\,H^{\lambda,\,\mu}_{\nu,\ \alpha}(z)$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\,(\nu+2r+1)\,(z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\ \Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$-\nu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$=1/\mu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\mu-2\alpha+2)(z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$+2/\mu \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\mu r+\alpha+1)(z/2)^{\nu+2r+1}}{\Gamma(\mu r+\alpha)\,\Gamma(\nu+\lambda r+3/2)}$$

$$=\left(\frac{\mu-2\alpha+2}{\mu}\right) H_{\nu,\,\alpha}^{\lambda,\,\mu}(z)+\frac{2\,.\,(z/2)^{\nu+1}}{\mu\,.\,\Gamma(\alpha-1)\,\Gamma(\nu+3/2)}$$

$$-\frac{z^{2-\lambda}}{2^{1-\lambda}\mu} H_{\nu+\lambda,\,\mu+\alpha-1}^{\lambda,\,\mu}(z)$$

जो अभीष्ट था ।

विशेष दशायें

(क) $\alpha=3/2$ तथा $\mu=1$, (3.3) **में** रखने पर

$$\left(\frac{d}{dz}-\nu\right) H_{\nu}^{\lambda}(z)=\frac{z^{\nu+1}\,2^{-\nu}}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+3/2)}-\frac{z^{2-\lambda}}{2^{1-\lambda}} H_{\nu+1}^{\lambda}(z)$$

जो $H_{\nu}^{\lambda}(z)$ के लिये भौमिक[3] द्वारा दिया हुआ ज्ञात सूत्र है ।

(ख) $\alpha=3/2$, $\mu=1$ तथा $\lambda=1$, (3.3) में रखने पर

$$\left(\frac{d}{dz}-\nu\right) H_{\nu}(z)=\frac{z^{\nu+1}\,2^{-\nu}}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+3/2)}-z\,H_{\nu+1}(z)$$

जो वाट्सन[2] द्वारा ज्ञात सूत्र $H_{\nu}(z)$ के है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

उदार पथ-प्रदर्शन एवं सुझाव के लिये मैं डा० जी० एस० प्रसाद का आभारी हूँ । मैं प्रो० डा० के० एस० सक्सेना, भूतपूर्व प्रोफेसर एवं अध्यक्ष, गणित विभाग, राँची विश्वविद्यालय का भी आभारी हूँ जो समय-समय पर मुझे प्रोत्साहित करते रहे हैं ।

निर्देश

1. वाकर, जे०, The Analytic theory of Light 1904, यूनि० प्रेस० कैम्ब्रिज ।
2. वाट्सन, जी० एन०, A Treatise on the Theory of Bessel functions.
3. भौमिक, के० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1963, **6**, 1-11.
4. सीमैन, पी०, Jahbuch uber die fortschriticder Math., 1890, 340-342.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

जीवाणु 1 : 2 : 1 : 2 J 24 द्वारा सूर्य के प्रकाश में जल के प्रकाशिक विखण्डन पर खनिज विलयनों का प्रभाव

के० बहादुर, एस० रंगनायकी तथा एस० जे० सिंह
रसायन विभाग, इलाहाबाद यूनिवर्सिटी, इलाहाबाद

[प्राप्त—नवम्बर 24, 1984]

सारांश

अमोनियम मोलिब्डेट, डाइअमोनियम फास्फेट, जैव खनिज विलयन तथा फार्मेल्डिहाइड युक्त मिश्रण में सूर्य के प्रकाश की क्रिया द्वारा उत्पन्न जीवाणुओं 1 : 2 : 1 : 2 J 24 में सूर्य के प्रकाश में जल अणुओं के विखण्डन की क्षमता होती है। उद्भासन के एक निश्चित समय के पश्चात् जीवाणु-जल मिश्रण में खनिज विलयन का बढ़ती हुई मात्रा को समाविष्ट करने के लिए प्रारम्भ में मिश्रण में खनिज विलयन की अधिक मात्रा जीवाणु बनने में बाधा डालती है परन्तु जल एक बार जीवाणु बन जाते हैं तो वे विघटित नहीं होते अपितु वे बढ़ते और सम्बर्धित होते रहते हैं। एक विशिष्ट अनुपात में खनिज विलयन के साथ जीवाणु-जल मिश्रण द्वारा जल के प्रकाशिक विखण्डन की क्षमता अधिक होती है तथा खनिज विलयन का आयतन बढ़ाने से सूर्य के प्रकाश में रखने पर गैस का निकलना कम हो जाता है।

Abstract

Effect of mineral solution on photolytic splitting of water in sunlight by Jeewanu 1 : 2 : 1 : 2 J 24. *By* K. Bahadur, S. Ranganayaki and S. J. Singh, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Jeewanu 1 : 2 : 1 : 2 J 24 produced by the action of sunlight in a mixture having ammonium molybdate, diammonium hydrogen phosphate, biological mineral solution and formaldehyde, have ability to split water molecules in sunlight. To incorporate increasing amount of mineral solution in Jeewanu-water mixture after certain period of exposure the addition of a large amount of mineral solution in the mixture in the beginning, hinders the formation of Jeewanu but once Jeewanu are formed they do not disintegrate, but remain growing and multiplying. The ability

of photochemical splitting of water by Jeewanu-water mixture with mineral solution, in a specific ratio, have greater ability of water splitting and with increasing the volume of mineral solution, decreases gas evolution on exposure to sunlight.

बहादुर[1] ने अमोनिया मोलिब्डेट, डाइअमोनियम हाइड्रोजन फॉस्फेट, जैव-खनिज तथा फॉर्मेल्डिहाइड के किरणित निर्जर्मित मिश्रण में जीवाणुओं का संश्लेषण किया। इन कणों में परिसीमा भित्ति आन्तरिक संरचनायें और वर्तमान सेल में उपस्थित कई जीव-रसायन होते हैं[2,3]। जीवाणु अन्तरवृद्धि संवर्धन तथा उपापचयी क्रियायें प्रदर्शित करते हैं[2]।

जीवाणुओं में फेरीडॉक्सिन-सदृश सक्रियता भी देखी गई[4]। फेरीडॉक्सिन सभी जीवित सेलों के आवश्यक घटक होते हैं और ये अपनी इलेक्ट्रॉन अभिगमन क्षमता के कारण ये प्रत्यक्ष या परोक्ष रूप से कई जीवरासायनिक अभिक्रियाओं में भाग लेते हैं।

ऐसा आगे देखा गया कि जल में जीवाणुओं का मिश्रण सूर्य के प्रकाश में आणविक नाइट्रोजन को यौगिकीकृत नाइट्रोजन में बदल सकता है[5]। यदि, किसी प्रकाशउद्भासित जलीय जीवाणु मिश्रण में कार्बन डाइऑक्साइड प्रवाहित की जाय तो कार्बन डाइऑक्साइड का एक भाग असंतृप्त हाइड्रोकार्बन में परिणत हो जाता है और कार्बन डाइऑक्साइड अपचित हो जाती है[10]। इसकी पुष्टि ^{14}C-युक्त बाइकार्बोनेट आयनों के उपयोग द्वारा की गई[7]।

जीवाणुओं में नाइट्रोजन-सदृश सक्रियता पहचानी गई है। यह देखा गया है कि सूर्य के प्रकाश के रखने पर जीवाणु-जल मिश्रण में ऊपर के स्थान में रक्खी गई ऐसेटिलीन $CH{\equiv}CH$ को एथिलीन, $CH_2{=}CH_2$ में अपचित करने की क्षमता देती है। उपर्युक्त मिश्रण में जल के स्थान पर D_2O लेने पर इसकी पुष्टि की गई और यह पाया गया कि प्राप्त एथिलीन $CHD{=}CHD$ था जिससे प्रदर्शित देता है कि जीवाणु D_2O को विखण्डित करते हैं और उत्पन्न ड्यूटेरियम ऐसेटिलीन के अपचयन में प्रयोग होता है। ये सब मिलाकर यह प्रदर्शित करते हैं कि सूर्य के प्रकाश में जीवाणु जल को हाइड्रोजन तथा ऑक्सीजन में विखण्डित कर सकते हैं।

खनिज की अनुपस्थिति में मिश्रण में ऐमीनो अम्ल नहीं बनते हैं परन्तु इसकी बहुत ही कम मात्रा में आवश्यकता होती है[8,9]। खनिज की अधिक मात्रा कण बनने में बाधक होती है[10]।

यह देखा गया है कि खनिज प्रोटोसेल जीवाणुओं के अजीवात जीवोत्पत्ति में सहायता करते हैं और इसीलिए प्रस्तुत शोधपत्र में जीवाणु 1 : 2 : 1 : 2 J 24 द्वारा जल के प्रकाशिकविघटन पर खनिज विलयन के प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

1. 150 मिली० आसुत जल में 60 ग्रा० अमोनियम मोब्लिडेट घोला गया।
2. 300 मिली० आसुत जल में 9.0 ग्रा० डाइअमोनियम हाइड्रोजन फॉस्फेट घोला गया।

3. **खनिज विलयन** : इसे 30.0 मिग्रा० सोडियम क्लोराइड, 30.0 मिग्रा० पोटैशियम सल्फेट 30.0 मिग्रा० कैल्सियम ऐसीटेट, 30.0 मिग्रा० मैग्नीशियम सल्फेट 30.0 मिग्रा० पोटैशियम हाइड्रोजन सल्फेट तथा 75.0मिग्रा० फेरस सल्फेट को 150 मिली० आसुत जल में घोलकर बनाया गया।

4. फार्मैल्डिहाइड का 36% विलयन प्रयोग किया गया।

उपर्युक्त चारों विलयनों को, अमोनियम मोलिब्डेट के 1 आयतन, डाइ-अमोनियम हाइड्रोजन फॉस्फेट के 1 आयतन, खनिज विलयन के 1 आयतन तथा फॉमैल्डिहाइड के 2 आयतन के अनुपात में अलग-अलग छः 500 मिली० शंकु फ्लास्कों में मिश्रित किया गया और सम्पूर्ण मिश्रण को 1 : 2 : 1 : 2 मिश्रण कहा गया।

मिश्रणों की तैयारी : अलग-अलग छः फ्लास्कों में 25 मिली० अमोनियम मोलिब्डेट, 50 मिली० डाइ-अमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट, 25 मिली० खनिज विलयन तथा 50 मिली० फार्मैल्डिहाइड लिये गये। इस प्रकार प्रत्येक फ्लास्क में 150 मिली० विलयन था। मिश्रणों को हिलाकर छहों फ्लास्कों को सूर्य के प्रकाश में रक्खा गया। चार घन्टों के उद्भासन के पश्चात्, फ्लाक नम्बर 2, 3, 4, 5 तथा 6 में खनिज विलयन के 25 मिली० मिलाये गये और सूर्य के प्रकाश में रक्खा गया। चार घन्टों के उद्भासन के पश्चात्, फ्लास्क नम्बर 3, 4, 5 तथा 6 में खनिज विलयन के और 25 मिली० मिलाये गये और सूर्य के प्रकाश में रक्खा गया। चार घन्टों के उद्भासन के पश्चात्, फ्लास्क नम्बर 4, 5 तथा 6 में फिर खनिज विलयन के 25 मिली० मिलाये गये और सूर्य के प्रकाश में रक्खा गया। चार घन्टों के उद्भासन के पश्चात् केवल फ्लास्क नम्बर 5 तथा 6 में 25 मिली० खनिज विलयन मिलाया गया और सूर्य के प्रकाश में रक्खा गया। चार घन्टों के उद्भासन के पश्चात् केवल फ्लास्क नम्बर 6 में फिर 25 मिली० खनिज विलयन मिलाया गया और छहों फ्लास्कों को सूर्य के प्रकाश में 24 घन्टों के पूर्ण उद्भासन के लिये रक्खा गया।

उद्भासन के एक निश्चित काल के पश्चात् खनिज विलयन मिलाने का विचार, जीवाणुओं में खनिज विलयन की बढ़ती हुई मात्रा को समाविष्ट करना था। यह देखा गया है कि प्रारम्भ में, मिश्रण में खनिज विलयन की अधिक मात्रा मिलाने से जीवाणुओं के बनने में बाधा डालती है। परन्तु जब एक बार जीवाणु बन जाते हैं तो वे खनिज विलयन की अधिक मात्रा मिलाने पर भी विघटित नहीं होते अपितु बढ़ते रहते हैं और संवर्धित होते रहते हैं। यह देखा गया कि जीवाणु मिश्रण में यदि खनिज विलयन की अधिक मात्रा मिलाई जाय और उसे सूर्य के प्रकाश में रक्खा जाय तो उत्पन्न जीवाणुओं में जलविखण्डन की अधिक क्षमता होती है। यह प्रयोग अधिक खनिजयुक्त जीवाणुओं को उत्पन्न करने के लिए प्रकल्पित किया गया, और यह देखने के लिए कि क्या उनमें जल विखण्डन की अधिक क्षमता होती है।

24 घन्टों के उद्भासन के पश्चात् कणों को निस्यंदन द्वारा पृथक किया गया और एक शोषित्र में सुखाया गया। सुखाये गये कणों के बुलबुलों की गणना के लिए निकाला गया। छः परखनलियों

सारणी 1

20 मिली० आसुत जल में निलम्बित 20.0 मिग्रा० कणों युक्त जीवाणु मिश्रण द्वारा प्रति मिनट निस्कासित बुलबुलों की संख्या मिनटों में उद्भासन

दिनों की संख्या	मिनटों के उद्भासन				
	30	60	C/S	30	60
1.	7.8±.37	5.6±.92		1.44±.77	11.0±1.34
2.	7.4±.77	7.6±.77		2.4±.77	4.4± .77
3.	6.6±. 4	8.4±.77		0.8±.37	0.4± .77
4.	4.4±.77	3.6±.50		5.6±.77	3.6± .77
5.	7.4±.77	1.2±.37		6.4±.50	4.6± .50
6.	2.6±.83	1.4±.77		5.0±.31	0.4± .77
7.	3.2±.37	1.2±.37		6.4±.50	1.6±. . 4
8.	2.8±.37	0.0±. 0		2.4±.59	0.4± .77
9.	1.6±.4	0.4±.77		4.6±. 4	0.0± . 0
10.	0.4±.77	0.0±.77		4.4±.77	0.4± .77

C/S इंगित करता है कि मिश्रण को नल के जल में ठण्डा किया गया, हिलाया गया और फिर उद्भासित किया गया।

सारणी 2

20 मिली० आसुत जल में निलम्बित 20.0 मिग्रा० कणों युक्त मिश्रण में 4 घन्टे के उद्भासन के पश्चात् मूल माध्यम में 25 मिली० खनिज विलयन मिलाने पर जीवाणु द्वारा निष्कासित बुलबुलों की संख्या

दिनों की संख्या	मिनटों में उद्भासन				
	20	60	C/S	30	60
1.	37.2±1.01	16.4±.50		3.2±.37	20.4±.50
2.	27.6± .77	7.8±.83		22.0±.70	1.4±.77
3.	26.8± .37	2.4±.77		7.4±. 4	3.4±.77
4.	12.6± .77	7.4±.42		34.6±. 4	9.0±.31
5.	17.4± .50	11.6±. 6		23.0±.44	9.0±.70
6.	17·4± .50	11.2±.37		14.0±.31	4.2±.37
7.	17.0± .44	5·6±.50		31.4±.50	27.2±.37
8.	14.6± .50	5.6±. 4		25.0±.70	3.6±.77
9.	12.2± .37	4.0±·44		23.6±. 4	8.0±.44
10.	10.8± .77	1.4±.50		23.0±.83	7.6±. 4

सारणी 3

20 मिली॰ आसुत जल में निलम्बित 20.0 मिग्रा॰ कणों युक्त मिश्रण में 4 घन्टे के उद्भासन के पश्चात् मूल माध्यम में दो बार 25 मिली॰ खनिज विलयन मिलाने पर जीवाणुओं द्वारा निष्कासित बुलबुलों की संख्या

दिनों की संख्या	मिनटों में उद्भासन				
	30	60	C/S	30	60
1.	16.4±50	8.2±.37		4.0±1.41	6.2±.37
2.	8.4±77	5.6±.77		3.4± .77	1.4±.77
3.	8.2±37	0.8±.37		1.4± .77	1.2±.37
4.	2.4±77	1.6±.77		4.2± . 2	2.8±.37
5.	7.0±44	3.4±. 4		3.0± .31	3.2±.37
6.	6.0±54	2.4±.77		4.2± .37	1.2±.37
7.	1.8±37	1.4±.77		1.6± .50	1.6±.50
8.	3.6±77	0.6±.77		2.6± .50	0.4±.77
9.	0.8±37	0.4±.77		5.4± .77	0.2±. 2
10.	0.6± 4	0.4±.77		3.2± .37	0.6±.77

सारणी 4

20 मिली॰ आसुत जल में निलम्बित 20.0 मिग्रा॰ कणी युक्त मिश्रण में 4 घन्टे के उद्भासन के पश्चात मूल माध्यम में तीन वार 25 मिली॰ खनिज विलयन मिलाने पर जीवाणु द्वारा निष्कासित बुलबुलों की संख्या

दिनों की संख्या	मिनटों में उद्भासन				
	30	60	C/S	30	60
1.	21.4±.60	6.2±.37		1.8±.58	5.4± ·61
2.	11.6±.92	1.8±.37		1.8±.48	1.8±1.11
3.	7.0±.31	4.2±.37		2.2±. 5	0.8± . 2
4.	2.4±.50	1.ｂ±.77		11.0±.31	2.2± .37
5.	8.2∓.37	4.0±.44		8.8±.66	2.0± .44
6.	5.6±.77	4.4±.77		2.2±.37	0.4± .77
7.	5.6±.50	1.0±.31		7.6±.50	4.4± .50
8.	3.8±.51	3.6±. 4		1.4±. 4	0.0± . 0
9.	1.4±.77	1.4±.77		4.8±.37	0.4± .77
10.	1.6±. 4	1.8±.37		3.4±. 6	0.6± .77

सारणी 5

20 मिली० आसुत जल में निलम्बित 20.0 मिग्रा० कणों युक्त मिश्रण में 4 घन्टे के उद्भासन के पश्चात मूल माध्यम में चार बार 25.0 मिली० खनिज विलयन मिलाने पर जीवाणु द्वारा निष्कासित बुलबुलों की संख्या

दिनों की संख्या	मिनटों में उद्भासन			
	30	60	C/S 30	60
1.	25.8±.7	12.6±.50	3.8±.37	5.6±.67
2.	9.4±.4	1.6±.77	5.2±.70	0.4±.77
3.	11.6±.6	1.6±.77	2.4±.50	0.4±.77
4.	1.6±.77	1.4±.77	7.4±.77	3.8±.37
5.	7.8±.58	5.2±.37	7.4±.50	4.0±.44
6.	5.0±.44	4.6±.50	5.0±.31	1.4±.77
7.	6·6±.50	0.8±.37	9.4±.50	4.2±.48
8.	5.0±.94	0.2±. 2	4.0±.74	0.0±. 0
9.	1.6±. 4	0.4±.77	6.8±.37	0.6±.77
10.	2.2±.58	0.6∓.77	4.8±.58	1.4±.77

सारणी 6

20 मिली० आसुत जल में निलम्बित 20.0 मिग्रा० कणों युक्त मिश्रण में 4 घन्टे के उद्भासन के पश्चात मूल माध्यम में पांच बार 25.0 मिली० खनिजविलयन मिलाने पर जीवाणु द्वारा निष्कासित बुलबुलों की संख्या

दिनों की संख्या	मिनटों में उद्भासन			
	30	60	C/S 30	60
1.	30.8±1.38	20.2±2.31	4.8±.96	7.4±1.20
2.	15.4±1.11	4.0± .89	7.2±.96	1.2± .37
3.	11.4± .50	4.2± .37	4.6±.77	1.6± ·77
4.	5.2± . 5	3.0± .31	7.0±.44	6.8± .37
5.	10.2± ·37	8.6± .50	8.6±. 4	7.0± .44
6.	11.0± .54	7.4± .50	4·0±.31	1.6± .77
7.	13.0± .44	1.8± .37	19.0±.50	11. ± . 4
8.	7.2±1.55	1.8± .66	9.0±.70	0. ± .77
9.	7.0± .44	1.6± .77	12.2±.37	5. ± · 4
10.	7.6± . 4	1.2± . 2	10.6±.50	4. ± .50

में अलग-अलग सभी छहों फ्लास्कों में 20 ग्राम सुखाये हुये कण लिए गये। कणों को आसुत जल के 20 मिली० जल में निलम्बित किया गया। बुलबुले-गणना की विधि द्वारा गैस का निष्कासन अध्ययन किया गया।

गैस बुलबुलों की गणना की विधि :

उद्भासन के लिये ली गई सभी छः परखनलियों को खूब हिलाया गया और कणों को परखनली की पेंदी में एकत्रित होने के लिए परखनलियों को रख दिया गया। 10-15 मिनटों के पश्चात्, मिश्रणों को दीवाल में लगे स्टैन्ड के ऊपर मिश्रण को सूर्य के प्रकाश में रक्खा गया। इस प्रकार प्रेक्षण के दौरान मिश्रण के कम्पन को रोका गया। सामान्यतः दस मिनट के उद्भासन के पश्चात् गैस के बुलबुलों का निकलना आरम्भ हो गया। परखनली की तली से निकले हुए लगभग 0.5 मिमी० या अधिक व्यास वाले बुलबुलों की ही गणना की गई और अधिक छोटे बुलबुलों की उपेक्षा की गई। प्रत्येक गणना के लिये प्रति मिनट निकले बुलबुलों की संख्या की गणना 5 मिनट तक की गई और परिणामों की परीक्षा सांख्यिकीय रूप से की गई। प्राप्त परिणाम सारणी 1-6 में दिये गये हैं।

विवेचना

सारणीबद्ध परिणाम प्रदर्शित करते हैं कि जीवाणुओं के मूल माध्यम को चार घन्टे उद्भासित करने के पश्चात् खनिज विलयन का एक आयतन मिलाने पर ऐसे कण बनते हैं जो जल के प्रकाशिक विखण्डन द्वारा गैस की अधिक मात्रा बनाते हैं। यदि मूल किरणन मिश्रण में खनिज विलयन की मात्रा बढ़ा दी जाती है तो उद्भासन पर प्राप्त जीवाणुओं में सूर्य के प्रकाश में जलविखण्डन की मात्रा कम होती है।

रोचक बात तो यह है कि 1 : 2 : 1 : 2 J 24 कणों ने जिनमें मूल माध्यम में खनिज विलयन का अधिक सान्द्रण था, ऐसे कण बनाये[10] जिनमें जल-अणुओं के प्रकाशिक विखण्डन की क्षमता कम थी, परन्तु विशिष्ट अनुपात में जिसमें चार घन्टे के उद्भासन के बाद केवल एक बार खनिज विलयन का केवल एक आयतन मिलाया गया था, ऐसे जीवाणु प्राप्त हुए जिनमें सूर्य के प्रकाश में रखने पर जल-विखण्डन की और अच्छी क्षमता थी।

प्राप्त परिणाम प्रदर्शित करते हैं कि गैस का निकलना पहले दिन अधिकतम होता है और उसके बाद यह प्रत्येक नमूने में दस दिन तक बराबर कम होता जाता है। इससे प्रदर्शित होता है कि जीवाणु 1 : 2 : 1 : 2 J 24 का स्थायित्व अन्य जीवाणुओं से कम होता है।

इस प्रकार खनिज विलयन के दो आयतन मिलाकर एक उद्भासन के प्रारम्भ और दूसरा चार घन्टे के उद्भासन के पश्चात् सूर्य के प्रकाश में रखने पर ऐसे जीवाणु उत्पन्न होते हैं जिनमें जल-विखण्डन की लगभग 4 से 5 गुनी अधिक क्षमता होती है।

निर्देश

1. बहादुर, के० इत्यादि, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1963, **6**, 63-117.

2. बहादुर, के०, Zbl. Babt., 1964, **118** (2), 671.

3. वही, वही, 1967, **121** (2), 291-319.

4. राव, के० के०, ऐडम्स, एम० डब्लू०, मारिस, पी० हाल, डी० ओ०, रंगनायकी, एस० तथा बहादुर, के०, Proc. International Sym. Biological Application of Solar Energy (BASE), मदुराई, भारत (1978) सम्पादक, ए० गणनम, एस० कृष्ण स्वामी तथा जे० एस० खान०, मैकमिलन कम्पनी इंडिया, मद्रास (1980) पृ० 201-204.

5. स्मिथ, ए०, फोल्सोम, सी० तथा बहादुर, के०, Experientia, 1981, **37**, 357.

6. रंगनायकी, एस०, बहादुर, के० तथा सजल कुमार, J. Brit. Inter. Soc., 1981, **34**, 251.

7. बहादुर, के०, फोल्सोम, सी०, स्मिथ, ए० तथा रंगनायकी, एस०, Golden Jubilee Commemoration Volume, Nat. Acad. Sci., India, (1980) पृ० 181.

8. भदौरिया, जी०, **डी० फिल थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1980.

9. वर्मा, पी०, **डी० फिल थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1983.

10. भट्टाचार्य, एल०. **डी० फिल थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1982.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

भानाखाप अभ्रक खान (जिला गया, बिहार) के पेग्माटाइट में उपस्थित टूरमेलीन की उत्पत्ति तथा खनन में महत्व

दुर्गापद कुइति
भौमिकी विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मई 18, 1985]

सारांश

अध्ययन क्षेत्र में विशाल स्थूल, अमंडलीय एवं अनुरूप अभ्रक उत्पादक पेग्माटाइट शिष्ट में उपस्थित है। टूरमेलीन खनिज पेग्माटाइट में तीन रूपों में मिलता है—(1) समावेश के रूप में (2) टूरमेलीनीकरण मंडल में अन्तर विकास संरचना के रूप में एवं (3) टुकड़ों के रूप में। समावेशों का निर्माण पहले हुआ है या समुदाय खनिजों के साथ समकाल में स्फाटित हुये हैं। टूरमेलीन के टुकड़ों का निर्माण पदार्थों के सीमाबद्ध गति के कारण हुआ है। पेग्माटाइट द्रव में ब्रोरान ,फ्लोरीन एवं जल की अधिकता ने अभ्रक-बहुल भागों के आसपास टूरमेलीनीकरण मंडलों को जन्म दिया है। यद्यपि टूरमेलीन, अभ्रक का सामान्यत: ऋणात्मक संकेतक माना गया है लेकिन भानाखाप अभ्रक खान में इसे धनात्मक संकेतक के रूप में माना जा सकता है।

Abstract

Occurrence of tourmaline in pegmatite : Origin and significance in mica exploration, Bhanekhap mica mine, Bihar. *By* Durga Pada Kuity, Department of Geology, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the study area the huge massive, unzoned, concordant mica producing pegmatite is present in the schist. Pegmatites carrying tourmaline show three types of behaviour, viz : (i) occurring as inclusions, (ii) huge intergrowth structure in the zone of the tourmalinisation, and (iii) in the form of patches. The inclusions formed earlier or crystallised simultaneously with the host minerals. Patches of tourmaline were formed due to restricted movement of the materials. Dominance of boron, fluorine and water in the pegmatite fluid has given rise to zones of tourmalinisation around a mica-rich parts. Although tourmaline is generally considered to be a negative indicator of mica but it can be used as a positive indicator for Bhanekhap mica mine.

अध्ययन क्षेत्र जो 24° 32′ अक्षांश एवं 85° 30′ देशांश के मध्य है, बिहार राज्य के गया जिले में स्थित है तथा भारत सर्वेक्षण मानचित्र संख्या 72 एच/10 के अन्तर्गत आता है। इस क्षेत्र के निकट कोडरमा रेलवे स्टेशन है। क्षेत्र में गझंडी रेलवे स्टेशन से भी पहुँचा जा सकता है जो गया-धनबाद मुख्य लाइन पर स्थित है। अध्ययन क्षेत्र में असंख्य प्रचीन खदाने विद्यमान हैं जिससे यह स्पष्ट कहा जा सकता है कि पहले यहाँ विस्तृत रूप से अभ्रक का खनन कार्य होता था। यहाँ का पेग्माटाइट स्थूल प्रकृति का है तथा पूर्व-पश्चिम में 2000 मीटर लम्बाई में एवं चौड़ाई में 100 से 125 मीटर तक फैला हुआ है। पैग्माटाइट शिस्ट के अनुरूप है तथा इसका औसत नति 40° पूर्व में है। शिस्ट के टुकड़े (3×6 मिमी० आकार) एवं स्फटिक कोष (quartz pod) अमंडलीय पेग्माटाइट में दृष्टव्य है। वर्तमान में नौवीं सतह (गहराई 85 मीटर) पर खनन कार्य जारी है। अभ्रक के अन्वेषण एवं दोहन के लिये कुछ आवश्यक आँकड़े उसकी संरचना, खनिज बनावट आदि से जुड़े हुये हैं। इस खान के पैग्माटाइट में टूरमेलीन समावेश, टुकड़ों एवं कहीं-कहीं अति टूरमेलीनीकरण के रूप में मिलता है।

पेग्माटाइट की प्रकृति

'बिहार अभ्रक पट्टी' के पेग्माटाइट (समसत्व, मंडल अथवा विभिन्न रूप में) की उत्पत्ति क्षार, ऐल्युमिना एवं सिलिका युक्त द्रव के विभिन्न रचनात्मक स्थानों में अविराम अंतःप्रवाह से हुआ है। द्रव के एक स्थान से दूसरे स्थान को जाते समय फैलाव नहीं हुआ वरन् एक निर्दिष्ट मार्ग पर आगे बढ़ता रहा। सम्भवतः देशशिलाओं के कमतर होने के कारण फेल्सपेथाईजेशन कम हुआ। ऐसा माना जाता है कि अभ्रक युक्त पेग्माटाइट के लिये गहरे समता वाले क्षेत्र प्रत्यक्ष रूप में सहायक नहीं होते। क्षेत्र के पेग्माटाइट से अभ्रक का उत्पादन हो रहा है। अभ्रक में साधारणतः स्फटिक, टूरमेलीन एवं फेल्सपार खनिजों का समावेश है। टूरमेलीन फैले हुए आकार एवं विशिष्ट गुण विलेख हुए हैं परन्तु स्थूल आकृति की भी कमी नहीं है। इस पेग्माटाइट के स्फटिकीकरण-क्रम के शिलावीक्षणीय अध्ययन से पता चलता है कि टूरमेलीन का लम्बे समय तक स्फटिकीकरण हुआ है।

टूरमेलीन की प्रकृति

टूरमेलीन के रंगों की भिन्नता पेग्माटाइट के संरचना पर निर्भर है। पूर्णरूप से विकसित काले रंग के टूरमेलीन स्फाट अधिक नहीं मिलते। इन खनिजों के रंगों में समानता होने के बावजूद इनके स्वभाव में भिन्नता स्पष्ट परिलक्षित होती है। टूरमेलीन के स्फाट स्थूल, स्तम्भाकार, पतले एवं सुई के आकार के मिलते हैं। लम्बे स्तम्भाकार स्फाट साधारणतः अधिक झुके हुये अथवा लम्बवत् हैं। भौतिक एवं सूक्ष्मदर्शी गुणों के आधार पर इसे सोरलाइट माना गया है। स्फाट में अनुप्रस्थ विभंग तथा स्थूल रूप में अनियमित विभंग उपस्थित हैं। ये विभंग स्फटिक या मस्कोवाइट के परतदार समूहों से भरे हुए हैं।

उत्पत्ति

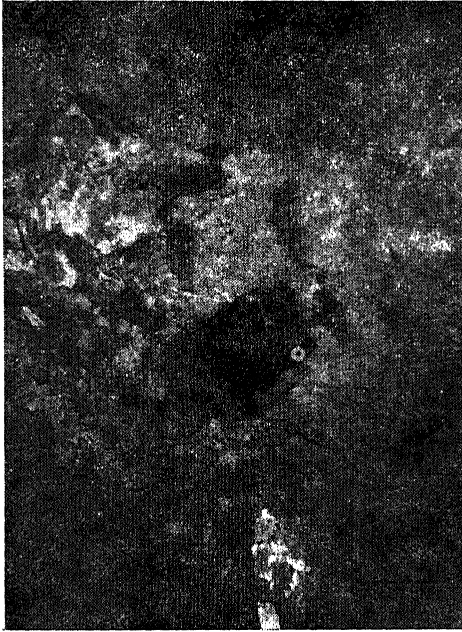
क्षेत्र में पाये जाने वाले पैग्माटाइट का देशशिलाओं के साथ स्पष्ट सम्पर्क है। केवल कुछ स्थानों पर सम्पर्क स्थलों में पतले स्फटिक के पट्टे देखने को मिलते हैं। कम प्रभावित शिस्ट के फँसे लांछनों

(देशशिला) के स्वभाव भी 'प्राचीर शिला परिवर्तन' रीति के अल्प प्रभाव को प्रमाणित करती है। चूंकि मंडल में टूरमेलीन अभ्रक को प्रतिस्थापित कर पोटाश को मुक्त करता है इसीलिए देशशिला में छोटे-छोटे टूरमेलीन के दाने सान्द्रित अवस्था में मिलते हैं तथा उन स्थानों पर भी मिलते हैं जहाँ अल्प मात्रा में टूरमेलीन के दाने पैग्माटाइट में विद्यमान हैं। दक्षिणी रोडेशिया के रीं, पाइपर तथा हेनड्रेन खानों के तलभागों में मस्कोवाइट ने टूरमेलीन के सांद्रण की सुविधा प्रदान की है। पेग्माटाइट तथा शिस्ट के सम्पर्क स्थल में शिस्ट का पुनरस्फटीकरण स्फटिक समूहों एवं मस्कोवाइट के रूप में हुआ है। इस मंडल में टूरमेलीन की प्रधानता संकेत करती है कि पैग्माटाइट द्रव में बोरान की अधिकता थी। इस मंडल में बायोटाइट की अनुपस्थिति अथवा अल्पमात्रा टूरमेलीन के साथ एक पूरक सह-भागिता दर्शाती है। इसका कारण रहा होगा बोरान-बहुल वातावरण, जिसके कारण मस्कोवाइट का बायोटाइट से अधिक स्फोटन अथवा मस्कोवाइट में उपस्थित फ्लोरीन का आंशिक दबाव[2]।

टूरमेलीन टुकड़ों के निर्माणकारी पदार्थ बाद में आये या इसकी गति माध्यम के कठोरीकरण के कारण रुक गयी, वाष्पीय अवस्था में पदार्थ स्फाटन हेतु अनुकूल जगहों पर, चाहे वह दूर क्यों न हो, जा सकते हैं। ऐसा सम्भव है कि मस्कोवाइट के स्फाटन ने फ्लोरीन तथा पानी का अधिकांश भाग पैग्माटाइट से ले लिया जिसके परिणामस्वरूप बचे हुए पेग्माटाइट द्रव की गति में शिथिलता आ गई अन्यथा यह टूरमेलीनीकरण मंडल तक पहुँच जाता। टूरमेलीन लांछन में स्फाट रूपों की अनुपस्थिति, वाह्य किनारों की अन्तरविकास प्रकृति एवं विदारणों में शक्कर प्रकृति के दुधिया दानेदार फेल्सपार, यह सिद्ध करते हैं कि स्फाटन प्रक्रिया तीव्र था एवं उसका समापन अन्तिम अवस्था के साथ हुआ।

परिणाम तथा विवेचना

आनुषंगिक खनिज टूरमेलीन वैज्ञानिकों का अधिक ध्यान आकर्षित नहीं करता रहा है। इस खनिज का अध्ययन अभ्रक के पाये जाने पर कुछ प्रकाश डालता है। इसके पेग्माटाइट में उपस्थित रहने के कारण इसका उपयोग अभ्रक के संकेतक के रूप में किया जा सकता है। टूरमेलीन साधारण रूप में ऋणात्मक संकेतक माना जाता है परन्तु इस खान में यह खनिज निश्चित संकेतक के रूप में काम करता है। अध्ययन क्षेत्र में पाये जाने वाला खनिज टूरमेलीन तीन प्रकार का व्यवहार दर्शाता है—(1) टूरमेलीनीकरण मंडल के रूप में जहाँ यह खनिज पेग्माटाइट में समूहों में मिलता है। यह रूप इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि इसकी उत्पत्ति या तो अभ्रक के परिपूर्ण मंडल के आरम्भ में हुई है या अन्त में। यह उस बिन्दु को चिन्हित करता है जहाँ टूरमेलीन निर्माणकारी पदार्थों की गति व्यवहारिक रूप से रुक गई थी और जिससे फेल्सपार के साथ विशाल टूरमेलीन में अन्तर-विकास संरचनाओं का निर्माण हुआ। (2) सफेद अभ्रक में टूरमेलीन के चमकते हुये छोटे सूच्याकार स्फाट का समावेश के रूप में मिलना यह सिद्ध करता है कि इसका निर्माण या तो पहले हुआ या मस्कोवाइट के साथ समकाल में स्फटित हुआ। (3) स्थूल टूरमेलीन का टुकड़ों के रूप में मिलना यह दर्शाता है कि इनका निर्माण सीमाबद्ध गति के कारण हुआ है जो माध्यम के भौमरासायनिक शर्त में बदलाव के फलस्वरूप प्रभावित हुआ।





अ ब

अ—खान के अन्दर लिया गया चित्र । इसमें टूरमेलीन (काला) एवं फेल्सपार की सह-उत्पत्ति दिखायी गयी है । चित्र के दाहिनी ओर कुछ अभ्रक भी दिखाई दे रहा है ।

ब—खान के अन्दर लिया गया चित्र । इस में स्थूल आकृति का टूरमेलीन लांछन दिखाया गया है ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० एस० एस० श्री निवासन्, विभागाध्यक्ष, भौमिकी विभाग का, शोध कार्यों में लगातार उत्साह एवं सुविधा देने के लिये आभारी है । डॉ० अवधेश कुमार शर्मा, प्रवक्ता, शासकीय अभियान्त्रिक महाविद्यालय, बिलासपुर, इस शोधपत्र की प्रस्तुति में सहयोग के लिए धन्यवाद के पात्र हैं । लेखक इस शोधकार्य के लिए विश्वविद्यालय अनुदान आयोग, नई दिल्ली से प्रदत्त आर्थिक सहयोग के लिए कृतज्ञ है ।

निर्देश

1. महादेवन, टी० एम० तथा मूर्ति, एम० वी० एम०, **रि० इन्स० जियो० कां० प्रो०, सं० 6, भाग 6 : मिनरल एन्ड जेनेसिस आफ पैग्माटाइट**, 1964, 45-58.
2. महादेवन, टी० एम० तथा मैथानी, जे० वी० पी०, **मि० जियो० सर्वे० इंडिया**, 1967, 93, 28-30.
3. विलिस, जे० डब्लू०, **जियो० सर्वे० बुलेटिन**, 1961, 51, 81.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

जल-वाष्प में जोशी प्रभाव की पृष्ठीय संवेदनशीलता पर भित्ति-विलेपन का महत्व

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त—दिसम्बर 12, 1984]

सारांश

जल-वाष्प में जोशी प्रभाव $\triangle i$ का भित्ति-पृष्ठ की प्रकृति के साथ विचरण का अध्ययन सीमेन्ज प्रकार के ओजोनित्रों a, b, c तथा d में किया गया। चारों ओजोनित्रों को अम्ल से अभिक्रिया कराने के उपरान्त KCl (b), Al_2O_3 (c), H_3PO_4 (d) से विलेपित किया तथा (a) निर्लेपित था। $-\triangle i$ के प्रकटीकरण के लिये आवश्यक काल-प्रभावन की मात्रा b में न्यूनतम तथा a और c में सुप्रेक्ष्य थी। अधिकतम $-\%\triangle i$ के परिमाण का क्रम

KCl विलेपित > निर्लेपित > Al_2O_3 विलेपित

था। H_3PO_4 विलेपित ओजोनित्र में केवल $+\triangle i$ का प्रेक्षण हुआ। बैडिन तथा टेलर एवं लैविन की खोजों के प्रकाश में उपर्युक्त परिणामों के सैद्धान्तिक महत्व की ओर इंगित किया गया है।

Abstract

Role of wall-coatings in surface sensitivity of the Joshi effect in water vapour. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Variation of the Joshi effect $\triangle i$ in water vapour with the nature of the wall surface has been studied in Seimens type ozonizers a, b, c and d. All the four ozonizers were acid treated and then three were coated with KCl (b), Al_2O_3 (c), H_3PO_4 (d) and the fourth (a) was kept blank. Amount of ageing necessary for initiation of $-\triangle i$ was least in b and appreciable in a and c. Magnitude of maximum $-\%\triangle i$ is in the order :

KCl coated > Blank > Al_2O_3 coated.

Only $+\triangle i$ was observed with H_3PO_4 coated ozonizer. Theoretical significance of these results has been pointed out in the light of the findings of Bandim and Taylor and Lavin.

यह बताया गया है[1,2] कि विसर्जन नली का इलेक्ट्रोड-पृष्ठ निष्क्रिय नहीं रहता है, वरन् जोशी प्रभाव $\triangle i$ की उत्पत्ति में महत्वपूर्ण भाग अदा करता है। चेरियन[3] तथा शुक्ला[4] ने क्लोरीन में और मोहंती[5] ने ऑक्सीजन में KCl, NaCl तथा काँच-चूर्ण-सदृश पदार्थों की परतों के प्रभाव का अध्ययन किया। जल वाष्प में विसर्जन[6–9] से सम्बन्धित कतिपय कारकों के विवेचन में पोटैशियम क्लोराइड, ऐलुमिना तथा फास्फोरिक अम्ल का महत्वपूर्ण उपयोग सिद्ध हुआ है। अतः इन पदार्थों के भित्ति-विलेपन का जल-वाष्प में जोशी प्रभाव $\triangle i$ के साथ सम्बन्ध को प्रस्तुत लेख में अध्ययन किया गया।

प्रयोगात्मक

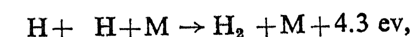
प्रयुक्त काँच-उपकरण तथा विद्युत परिपथ पूर्व-प्रकाशित अध्ययन[10] के समान थे। सीमेन्ज प्रकार के काँच के ओजोनित्र b तथा d के इलेक्ट्रोडों की अन्दर की सतहों की अम्ल से अभिक्रिया करके उन्हें क्रमशः एनालार पोटैशियम क्लोराइड तथा फास्फोरिक अम्ल के मोलर जलीय विलयन से विलेपित किया। ओजोनित्र c के अम्ल अभिकृत इलेक्ट्रोड पर जमी ताजी $Al(OH)_3$ की तह को 300 °C पर गरम करके ऐलुमिना की परत प्राप्त की गई। ओजोनित्र a के अम्ल-अभिकृत इलेक्ट्रोड-पृष्ठ को निर्लेपित (ब्लैंक) रखा गया। a-d के वलयाकार भाग में 13.6 मिमी (Hg) 30 °C दाब पर जल-वाष्प को प्रविष्ट किया।

परिणाम तथा विवेचना

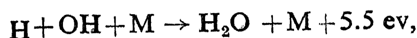
प्रेक्षणों से पता लगा कि अम्ल-अभिकृत निर्लेपित ओजोनित्र a में काल-प्रभावन के पूर्व $-\triangle i$ अत्यल्प था और 15 मिनट के काल-प्रभावन-स्थिर अनुप्रयुक्त विभव पर सतत् विद्युत् विसर्जन के पश्चात् ही प्रेक्ष्य था। KCl अनुलेपित ओजोनित्र b में $-\triangle i$ का प्रेक्षण नगण्य काल-प्रभावन के उपरान्त हुआ। Al_2O_3 अनुलेपित ओजोनित्र c में $-\triangle i$ की उत्पत्ति के लिए दो घंटे तक काल-प्रभावन करना पड़ा। H_3PO_4 अनुलेपित ओजोनित्र d में प्रयुक्त अनुकूल दशाओं के विस्तृत परिसर के वावजूद, $-\triangle i$ का प्रेक्षण नहीं हुआ; केवल $+\triangle i$ का ही, काल-प्रभावन के पूर्व प्रेक्षण हुआ जो कि काल-प्रभावन के साथ शीघ्र ही इतना घट गया कि 15 मिनट बाद यह लुप्त हो गया। काल-प्रभावन ने पात्र a-c में $-\triangle i$ को उच्चतम तक बढ़ाया। प्राप्त आँकड़ों (चित्र 1) से स्पष्ट है कि आपेक्षिक जोशी प्रभाव $-\%\triangle i$ का क्रम है :

KCl अनुलेपित (b) > निर्लेपित (a) > Al_2O_3 अनुलेपित (c)

परमाणु-मूलक संयोग-प्रक्रियाओं में पृष्ठ की प्रकृति के प्रभाव की व्याख्या में पृष्ठीय फिल्म के महत्व पर बल दिया गया है।[7,8,11] विद्युतविसर्जन के दौरान H_2O का H तथा OH में वियोजन हो जाता है।[8,12] इलेक्ट्रोड भित्तियों पर इनका उष्माक्षेपी प्रक्रिया के साथ पुनःसंयोजन होता है। निम्नांकित प्रक्रियाएँ सम्भावित हैं[11] :



$$H + H + M \rightarrow H_2 + M + 4.3\ ev,$$

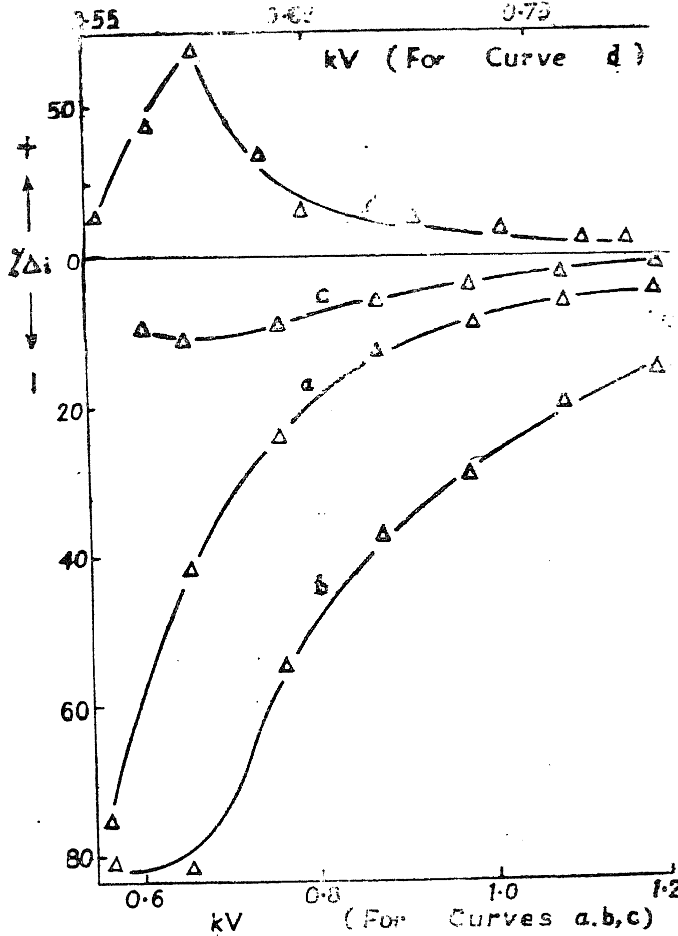


$$H + OH + M \rightarrow H_2O + M + 5.5\ ev,$$



$$OH + OH + M \rightarrow H_2O_2 + M + 3.1\ ev,$$

M पुनः संयोजन को उत्प्रेरित करने वाला पृष्ठ है। ऐसा पाया गया है[9] कि पुनः संयोजन प्रक्रियाओं का H_3PO_4 के द्वारा विशेष रूप से निरोध तथा KCl के द्वारा वर्धन होता है; और H_2O या/तथा H_2O_2 की मात्रा का नियंत्रण पृष्ठ पर विद्यमान जल की सीमा के द्वारा होता है। KCl शुष्क, निर्लेपित माध्यमिक आर्द्र पृष्ठ तथा H_3PO_4 अति आर्द्र पृष्ठ प्रस्तुत करता है। $-\%\Delta i$ का KCl-अनुलेपित से निर्लेपित तथा H_3PO_4-अनुलेपित पृष्ठ की ओर घटते जाना सिद्ध करता है कि प्रकाश की क्रिया पर पृष्ठ पर परमाणुओं या/तथा मूलकों के पुनः संयोजन से साहचर्य है।



चित्र 1—जल-वाष्प में (a) निर्लेपित, (b) KCl, (c) Al_2O_3 तथा (d) H_3PO_4 अनुलेपित ओजोनित्रों में विभव के साथ आपेक्षिक जोशी प्रभाव का विचरण।

H+H तथा H+OH की पुनःसंयोजन अभिक्रियाओं के अध्ययन[7] से ज्ञात हुआ है कि न तो स्वच्छ काँच-पृष्ठ और न ही KCl फिल्मयुक्त पृष्ठ हाइड्रोजन परमाणुओं के पुनः संयोजन के लिए

दक्ष है। विसर्जन नली में जब जल-वाष्प प्रवाहित की गई तो KCl या Al_2O_3 फिल्मयुक्त तापमापियों ने 85-90 °C की उल्लेखनीय ताप-वृद्धि प्रदर्शित की।[7] इससे यह परिणाम निकला कि निर्लेपित पृष्ठ के विपरीत, KCl या Al_2O_3 फिल्म H+OH की पुनः संयोजन की अभिक्रिया को KCl उत्प्रेरित नहीं करता[7], अतः निष्कर्ष निकला कि KCl पर शोषण तथा OH का पुनः संयोजन पर्याप्त होते हैं। स्पेक्ट्रमदर्शी अध्ययनों से इस प्रेक्षण की पुष्टि होती है।[8] चूंकि निर्लेपित ओजोनित्र की तुलना में, KCl अनुलेपित ओजोनित्र में $-\%\triangle i$ पर्याप्त अधिक है, जिससे पता लगता है कि पृष्ठ पर OH मूलकों का शोषण वह कारक है जो $-\%\triangle i$ के परिमाण का नियंत्रण करता है। यही जोशी के मत[13] का प्रतिफल है कि अधिशोषण-सदृश इलेक्ट्रोड-परत $\triangle i$ का प्रमुख स्थल है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

कु० के० देवी के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक अभारी है।

निर्देश

1. प्रसाद, जे०. **ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका**, 1974, **1**, 13.
2. प्रसाद, जे०, **काइनेटिका-आइ-काटेलिज**, 1977, **18**, 497.
3. चेरियन, टी० वी०, **प्रोसी० इण्डियन साइं० कां०, फिजि० सेक्सन**, 1945, ऐब्स्ट०, **17**, 43.
4. शुक्ला, बी० एम०, **जर्न० फिजि०कोला० किमि०**, 1949, **53**, 1239.
5. मोहंती, एस० आर०, **जर्न० इण्डियन केमि० सोसा०**, 1953, **30**, 9.
6. पीजे, आर० एन०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1930, **52**, 5106.
7. टेलर, एच० एस० तथा लैविन, जी० आई०, **वही**, 1930, **52**, 1910.
8. फ्रोस्ट, ए० ए० तथा ओल्डेनबर्ग, ओ०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1936, **4**, 642.
9. बैंडिन इ० जे०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1948, **70**, 3651.
10. प्रसाद, जे०, **रिव० रोमेन किम०**, 1979, **21** (5), 705.
11. स्मिथ, डब्लू० वी०, **जर्न० केमि० फिजि०** 1943, **11**, 110.
12. गेड्ब, के० एच०, **वही**, 1936, **4**, 391.
13. जोशी, एस० एस०, **करेंट साइंस**, 1947, **16**, 19.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 3, 1985

बंधित जल अणु और उसका MgO की ताप उद्दीपित प्रतिदीप्ति पर प्रभाव

एम० एन० बापट तथा एस० शिवरामन
भौतिकी विभाग, सागर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त—जून 11, 1984]

सारांश

MgO की ताप उद्दीपित प्रतिदीप्ति पर विभिन्न प्रक्रियाओं के प्रभाव की विवेचना की गई है।

Abstract

Bound water molecule and its effect on the thermoluminescence of MgO. *By* M. N. Bapat and S. Shivraman, Physics Department, Saugor University, Saugor.

Effect of various treatments on the thermoluminescence of MgO has been discussed.

बंधित जल अणु पदार्थ की क्रिस्टलीय संरचना तथा ग्रेन बाउंडरी पर प्रभावकारी होता है।[1] साकागूची तथा अन्य[2] एवं कोल्युसिया तथा सहयोगियों[3] ने दर्शाया है कि कुछ रसायन जल की पूर्व क्रिया द्वारा अच्छे फॉस्फर बनाते हैं। यह पाया गया है कि जल अणु की उपस्थिति से MgO में भी एक ताप प्रतिदीप्ति उच्चिष्ठ प्राप्त होता है[4] किन्तु अभी निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता है कि यह बंधित जल अणु की उपस्थिति से है अथवा OH^- आयन की उपस्थिति से अथवा O_2 के रासायनिक शोषण से है।

कोल्युसिया तथा सहयोगी[3] प्रतिपादित कर चुके हैं कि OH^- आयन की उपस्थिति से MgO की प्रतिदीप्ति दृश्य क्षेत्र में मिल सकती है किन्तु इस प्रतिदीप्ति की तीव्रता बहुत कम थी। हमने[5] प्रदर्शित किया है कि OH आयन कम दूरी श्रेणी (Low range order) की सतह अवस्थायें (Surfac states) बनावें तो दृश्य क्षेत्र में प्रतिदीप्ति की तीव्रता बढ़ जाती है। इस प्रेषण में MgO पर की गई विभिन्न प्रक्रियाओं द्वारा उसकी ताप उद्दीपित प्रतिदीप्ति पर प्रभाव की विवेचना की गई है।

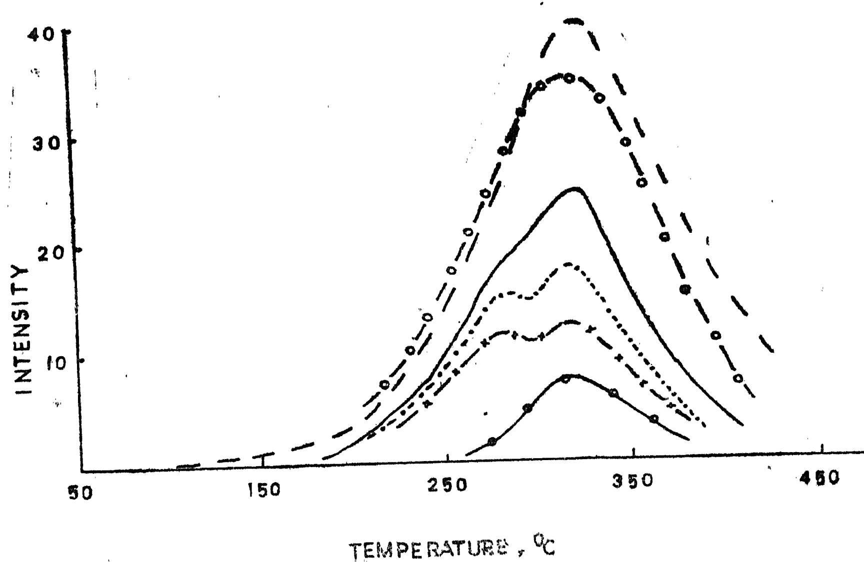
प्रयोगात्मक

शुद्धतम प्राप्य अभिकर्मकों को विभिन्न प्रयोगों हेतु लिया गया। इसे त्रिआसवित जल में 48 घन्टें तक पाचित किया, फिर कमरे के ताप पर सूखने दिया गया।

शुष्क MgO के बराबर-बराबर भाग किये एवं उन्हें 100°C से 800C° तक 100° के अंतराल में गर्म किया गया। 365 एन० एम० विकिरण वाली पराबैंगनी किरणों द्वारा नमूने को 2 मिनट तक ऊर्जित किया एवं ताप नियंत्रित ताप उद्दीपित प्रतिदीप्ति इकाई द्वारा प्रेक्षण किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

1. कमरे के ताप पर प्राप्त MgO द्वारा अधिकतम ऊर्जा विकिरित की गई जिसका उच्चिष्ठ 320°C पर था। 100, 200, 300°C पर प्राप्त MgO में 320°C का ताप उच्चिष्ठ क्रमशः कम होता गया जैसा कि चित्र 1 से स्पष्ट है।



चित्र 1 MgO के लिये ताप उद्दीपन प्रतिदीप्ति वक्र
कमरे के ताप पर
शुष्क किया गया — — —
100°C —,,—,, — —○—○—
300°C—,,—,, ————
500°C ,, ,, ○~○~○
800°C ,, ,, —×—×...
NaOH द्वारा अवक्षेपित—○—

2. अपेक्षाकृत कम ताप पर प्राप्त MgO में 280°C पर एक आरोह सा था। वह अधिक ताप पर प्राप्त नमूनों में स्पष्टतर होता गया एवं 800°C पर प्राप्त MgO में 320°C एवं 280°C वाले उच्चिष्ठ लगभग बराबर तीव्रता के थे। किन्तु 800°C पर अधिक समय तक नमूना रखने पर 32°C वाले उच्चिष्ठ की तीव्रता क्रमशः कम होती गई।

3. मैग्नीशियम ऐसीटेट[5] से प्राप्त MgO में केवल 320°C का ताप प्रतिदीप्ति उच्चिष्ठ प्राप्त हुआ। इसी प्रकार मैग्नीशियम नाइट्रेट से NaOH द्वारा अवक्षेपित $Mg(OH)_2$ में भी यही उच्चिष्ठ प्राप्त हुआ जिसकी तीव्रता NH_4OH द्वारा अवक्षेपित $Mg(OH)_2$ से कम थी।

4. मैग्नीशियम ऐसीटेट से प्राप्त MgO को छोड़कर पाचित MgO का रंग पराबैंगनी प्रकाश में सफेद से क्रमशः बैंगनी होता गया, जैसे-जैसे शुष्क MgO प्राप्त करने का ताप बढ़ाया गया अर्थात् ताप वृद्धि के साथ अवशोषण बैंगनी दिशा में बढ़ता गया।

ग्लास तथा सर्ले[6] के अनुसार जल अणु की उपस्थिति से OH^- आयन MgO के ऋणायन रिक्तिका स्थान ग्रहण कर लेते हैं। इस कारण ऋणायन रिक्ति से उत्पन्न ताप प्रतिदीप्ति उच्चिष्ठ[6,7] 280°C कम विकसित हो पाता है।

आयन से जल बनने की प्रक्रिया[4] में उत्पन्न प्रकाश विकिरण 320°C का ताप उच्च बनाने में उत्तरदायी हो सकते हैं। किन्तु ऊर्जन एवं ताप प्रतिदीप्ति के लेखन की पुनः पुनः पुनरावृत्ति पर भी इस उच्चिष्ठ की उपस्थिति से प्रगट है कि ताप उच्चिष्ठ V_{OH} केन्द्रों की उपस्थिति में इलेक्ट्रान एवं होल के संयोग के कारण होना चाहिए[6]। अधिक ताप पर शुष्क MgO प्राप्त करने से V_{OH} केन्द्रों की संख्या क्रमशः कम होती जाती है जिससे 320°C वाला ताप उच्चिष्ठ क्षीण होता जाता है। OH के हटने के साथ ऋणायन रिक्तियों की संख्या बढ़ती जावेगी जो 280°C ताप उच्च के क्रमशः उभार से स्पष्ट है। इस प्रक्रिया से अवशोषण शीर्ष भी क्रमशः बैंगनी रंग की ओर बढ़ना चाहिये[3] जैसा कि अवलोकन से स्पष्ट है।

बंधित जल अणु जो कुछ फॉस्फर्स में प्रभावी है[2], MgO में अधिक प्रभावशाली नहीं होगा क्योंकि 800°C पर भी MgO शुष्क करने पर 320°C का उच्चिष्ठ पूर्णतया नष्ट नहीं होता जबकि इस ताप पर बंधित जल अणु की संभावना बहुत क्षीण होगी।

अवक्षेपित $Mg(OH)_2$ में ऋणायन रिक्तिका केन्द्र बहुत कम संभावित है जो Mg के निकट हो अतः 320°C वाला दीप्ति उच्चिष्ठ भी अधिक विकसित नहीं हो पाता। यही स्थिति ऐसीटेट से प्राप्त MgO की होगी जबकि इसकी प्रतिदीप्ति अधिकतम थी।

अतः प्रतिदीप्ति हेतु उत्तरदायी OH^- आयन उपयुक्त सतह अवस्थाओं का निर्माण करते हैं जो Mg^{2+} आयन के साथ तनु बंधित है जबकि ताप उद्दीपित प्रतिदीप्ति हेतु उत्तरदायी OH^- आयन, O_2 विस्थापित स्थानों पर है जो MgO में बहुत आसानी से प्राप्त हो सकते हैं[4,7,8]।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रथम लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग एवं म० प्र० शासन का आभारी है जिन्होंने उसे इस शोध का अवसर प्रदान किया।

निर्देश

1. ब्लाजेक, ए०, Thermal analysis, Van Nastrand Reinhold Company, London, 1972 पृष्ठ **75**.
2. साकागूची, एम०, ओहाटा, एम०, नाकाझाटो, के० तथा कोण्डा, टी०, J. Electrochem Soc. 1976, **123**, 75.
3. कोल्युसिया, एस०, टेंच, ए० जे० तथा सीगल, आर० एल०, JCS Faraday Trans. I, **1979, 75**, 1769.
4. बेटीनाली, सी० तथा फेरारेसो, जी०, Thermoluminescence of Geological Material, Academic Press, 1968, 143; J. Chem. Phys. 1966, **44**, 4646.
5. बापट, एम० एन०, Indian J. Pure. Appl. Phys. 1983, **20**, 984.
6. ग्लास, ए० एम० तथा सर्ल, टी० एम०, J. Chem. Phys. 1967, **46**, 2080; J. Phys. Chem. Soc. 1968, **29**, 907.
7. लूथरा, जे० एम० सत्यमूर्थी, ए० तथा गुप्ता, एन० एम०, J. Lumin, 1977, **15**, 395; कर्श, वाय०, क्रिश्चनपोलर, एन० तथा चेन, वाय०, Phil. Mag. 1977, **35**, 6353.
8. अब्राहम, एम० एम०, चेन, बाय०, बोटनर, एल० ए० तथा रेनाल्ड आर० डब्ल्यू०, Phys. Rev. Lett. 1976; **37, 849**; लेजेंन्स्की, आर०, वायसोकी, एस० तथा सूगीयर, एच०, Radiochem Radional Lett. 1981, **46**, 211.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 8 पौंड या 32 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 2 पौंड या 8 डालर

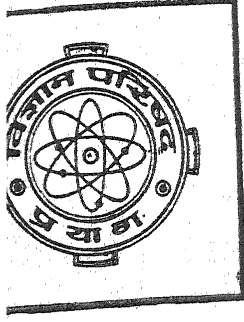
Rates

Annual Rs. 12 *or* 8 £ *or* $ 32
Per Vol. Rs. 3 *or* 2 £ *or* $ 8

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad,211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद



VIJNANA PARISHAD ANUSANDHAN PATRIKA

THE RESEARCH JOURNAL OF THE HINDI SCIENCE ACADEMY

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 28 October 1985 No. 4

[कौंसिल आफ साइंस एण्ड टेकनॉलाजी उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल आफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित]

विज्ञान परिषद्·इलाहाबाद

विषय-सूची

1.	बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ के कुछ विशेष गुण, जनक सम्बन्ध तथा प्रसार	आर० एन० पाण्डेय, रामजी सिंह तथा एस० के० पाण्डेय	313
2.	सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में पंचसंयोजी वैनेडियम द्वारा L-सिस्टिन के आक्सीकरण की गतिकी तथा क्रियाविधि	ए० पी० पयासी, के० शर्मा तथा वी० के० शर्मा	331
3.	विषकारी सायनोजनी ग्लायकोसाइडों का मटर प्रजातियों में जैवरसायनिक अध्ययन	चन्द्र प्रकाश अवस्थी	337
4.	k चरों में यूलेरी बहुपद	बी० के० राय, एस० एन० सिंह तथा वी० पी० सिंह	343
5.	घूर्णी तरल में स्टोक्स-एकमान तथा रैले स्तर	एच० के० कटियार तथा नवल किशोर	351
6.	थैलेट आयनों की उपस्थिति में निर्मित नीले परक्रोमेटों के उत्पादों द्वारा चर्म-शोधन	एस० ए० खान, संजय तिवारी तथा बी० एम० एल० तिवारी	357
7.	एक चिरप्रतिष्ठित एवं एक परिवर्द्धित बहुचर H-फलनों के गुणनफल को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाले एक व्यापकीकृत समाकल रूपान्तर के कुछ मूलभूत गुणधर्म	वाई० एन० प्रसाद तथा एम० भार्गव	361
8.	जिराम, ऐट्राजिन तथा 2-4 डी का ट्रिटिकेल और गेहूं के अंकुरण पर प्रभाव	शिव गोपाल मिश्र, उमेश सिंह तथा अम्बरीष तिवारी	379
9.	H $[z_1, z_2]$ का जैकोबी फलनयुक्त श्रेणियों में विस्तार	अशोक कुमार रोंघे	385

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x,y)\}$ के कुछ विशेष गुण, जनक सम्बन्ध तथा प्रसार

आर० एन० पाण्डेय, रामजी सिंह तथा एस० के० पाण्डेय

संप्रयुक्त गणित अनुभाग, संप्रयुक्त विज्ञान स्कूल प्रौद्योगिक संस्थान,

बनारस हिन्दूविश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—अगस्त 29, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ के कुछ विशेष गुणों तथा जनक सम्बन्धों को व्यवकलित किया गया है। इसी परिवर्धन के आधार पर कुछ ज्ञात बहुपदों के लिये भी जनक सम्बन्ध व्यवकलित किये गये हैं।

Abstract

Some special properties and generating relations of the polynomial set $\{\Pi^*_n(x, y)\}$. *By* R. N. Pandey, Ramji Singh and S. K. Pandey, Applied Mathematics Section, School of Applied Sciences, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-221005.

In this paper some special properties and generating relations of the polynomial set $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ have been obtained. On the basis of above development, generating relations for some known polynomials have also been deduced.

§1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र में दो चरों x, y के पदों में व्यापकीकृत बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ को एक जनक फलन द्वारा, जिसमें फॉक्स[4] के विभिन्न कोणांकों वाले दो H-फलन निहित हैं, परिभाषित किया गया है। इस बहुपदी सेट से विशिष्ट दशाओं में तीस से अधिक ज्ञात लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदी जैसे हरमाइट, जैक्सन, लागेर, लिगेन्ड्र, जैकोबी गेगनबर आदि तथा चार्लियर एवं मेक्सनर के विविक्त बहुपदी प्राप्त किये जा सकते हैं। उपर्युक्त बहुपदी वैज्ञानिकों तथा इन्जीनियरों के लिये बहुत ही महत्वपूर्ण हैं क्योंकि विभिन्न भौतिक समस्याओं के हल में निहित रहते हैं। विविक्त बहुपदी का गणितीय सांख्यिकी में विशिष्ट स्थान है। इससे यह स्पष्ट है कि उपर्युक्त बहुपदों के एकीकरण से प्राप्त व्याप-

कीकृत बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ तथा इसके विशेष गुण, विषय विकास के लिये अत्यन्त उपयोगी हो सकते हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र की अन्तर्वस्तु निम्नवत् है।

सर्वप्रथम §2 में बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ की परिभाषा दी गई है। §3 में बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ के लिये जनक फलन प्राप्त किये गए हैं तथा कुछ विशिष्ट दशाओं में कई अन्य ज्ञात निष्कर्षों को व्यवकलित किया गया है। §4 में बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ के कुछ प्राचलों को परिवर्तित करके स्वयं इसी के पदों में प्राप्त करने का प्रयत्न किया गया है। §5 में बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x, y) + \Pi^*_{n+1}(x, y)\}$ के लिये जनक फलन व्यवकलित किये गये हैं तथा कुछ विशिष्ट दशायें भी वर्णित हैं। §6 में $\{\Pi^*_n(x, y)\}$ के विशिष्ट दशाओं के अन्तर्गत शाह[8], चाण्डी[2], ब्रेफमैन[1], ट्रूसडेल[10], श्रीवास्तव[9], गाउल्ड तथा हापर[5], लाहिरी[7], द्वारा परिभाषित बहुपदों के लिये जनक फलन व्यवकलित किये गये हैं। §7 में एक अन्य जनक सम्बन्ध व्यवकलित किया गया है। इस जनक सम्बन्ध के लिये कुछ नवीन जनक फलन व्यवकलित किये गये हैं। §8 में हरमाइट बहुपदी के विभिन्न रूप के पदों में बहुपदी सेट के प्रसार का क्रमबद्ध अध्ययन किया गया है तथा कुछ विशिष्ट दशायें भी व्यवकलित की गई हैं। §9 में $\{\Pi^*_n(x,y)\}$ को जैक्सन बहुपदी के पदों में प्रकट किया गया है तथा रोचक निष्कर्ष प्रस्तुत किया गया है।

§2. परिभाषा

हम व्यापकीकृत बहुपदी सेट $\{\Pi_n(x, y)\}$ को एक जनक सम्बन्ध द्वारा, जिसमें फाक्स[4] के H-फलन का गुणन निहित है, निम्नवत् परिभाषित करते हैं

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*m;\, m_1;\, n_2;\, m_3;\, a;\, b;\, c;\, (\mathbf{a_p},\, \mathbf{A_p});\, \mathbf{r};\, (a_p,\, A_p);\, r}_{n;\, \alpha;\, \beta;\, \gamma;\, v;\, (\mathbf{b_q},\, \mathbf{B_{q+1}});\, (b_{q+1},\, B_{q+1})} (x, y) t^n$$

$$= M(1 - vx^{-m}t^m)^{-\alpha}\, H^{1,\mathbf{r}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}+1} \left[\frac{-ay^{n_2}t}{(1-vx^{-m}t^m)^{\beta}} \middle| \begin{matrix} \{(\mathbf{a_p}, \mathbf{A_p})\} \\ (\mathbf{b_1}, 1), \{(\mathbf{b_{q+1}}, \mathbf{B_{q+1}})\} \end{matrix} \right]$$

$$\cdot\, H^{1,r}_{p,q+1} \left[\frac{-bx^{m_1}y^c t^{m_3}}{(1-vx^{-m}t^m)^{\gamma}} \middle| \begin{matrix} \{(a_p, A_p)\} \\ (b_1, 1)\{(b_{q+1}, B_{q+})_1\} \end{matrix} \right], \tag{2.1}$$

जहाँ

$$\sum_{1}^{\mathbf{p}} \mathbf{A}_j - \sum_{j=2}^{\mathbf{q}+1} \mathbf{B}_j \leqslant 1;\quad \sum_{1}^{\mathbf{r}} \mathbf{A}_j - \sum_{\mathbf{r}+1}^{\mathbf{p}} \mathbf{A}_j + 1 - \sum_{j=1}^{\mathbf{q}+1} \mathbf{B}_j \equiv \lambda_1 > 0,$$

$$\sum_{1}^{p} A_j - \sum_{j=2}^{q+1} B_j \leqslant 1;\ \sum_{1}^{r} A_j - \sum_{r+1}^{p} A_j + 1 - \sum_{j=2}^{q+1} B_j \equiv \lambda_2 > 0,$$

$$\left|\arg \frac{ay^{n_2 t}}{(1-vx^{-m}t^{m})^{\beta}}\right| < \tfrac{1}{2}\Pi\lambda_1,$$

$$\left|\arg \frac{bx^{m_1}y^{c}t_3}{(1-vx^{-m}t^{m})^{\gamma}}\right| < \tfrac{1}{2}\Pi\lambda_2,$$

तथा

$$M=\frac{\prod_{j=2}^{q+1}\Gamma(1-\mathbf{b}_j+\mathbf{B}_j\mathbf{b}_1)\prod_{j=\mathbf{r}+1}^{\mathbf{p}}\Gamma(\mathbf{a}_j-\mathbf{A}_j\mathbf{b}_1)}{(-ay^{n_2 t})^{\mathbf{b}_1}\prod_{j=2}^{\mathbf{r}}\Gamma(1-\mathbf{a}_j+\mathbf{A}_j\mathbf{b}_1)}$$

$$\cdot\frac{\prod_{j=2}^{q+1}\Gamma(1-b_j+B_jb_1)\prod_{j=r+1}^{p}\Gamma(a_j-A_jb_1)}{(-by^{c}x^{m_1}t^{m_3})^{b_1}\prod_{j=1}^{r}\Gamma(1-a_j+A_jb_1)}.$$

व्यापकीकृत बहुपदी सेट

$$\Pi^{*m;\, m_1;\, n_2;\, m_3;\, a;\, b;\, c;\, (\mathbf{a_p},\, \mathbf{A_p});\, \mathbf{r};\, (a_p,\, A_p);\, r}_{n;\, \alpha;\, \beta;\, \gamma;\, v;\, (\mathbf{b_{q+1}},\, \mathbf{B_{q+1}});\, (b_{q+1},\, B_{q+1})}(x, y)$$

में बहुपदी की कोटि तथा m, m_1, n_2, m_3 आदि प्राचल हैं। संक्षेप में हम इसे $\Pi^*_n(x, y)$ से प्रदर्शित करते हैं। पुनश्च, यदि बहुपदी सेट के किसी प्राचल में परिवर्तन हो तो केवल उसी प्राचल को प्रदर्शित करेंगे।

जैसे, बहुपदी सेट

$$\Pi^{*m;\, m_1;\, m_3;\, a;\, b;\, c;\, (\mathbf{a_p},\, \mathbf{A_p});\, \mathbf{r};\, (a_p,\, A_p);\, r+1}_{n;\, \alpha+1;\, \beta;\, \gamma;\, v;\, (\mathbf{b_{q+1}},\, \mathbf{B_{q+1}});\, (b_{q+1},\, B_{q+1})}(x, y)$$

को निम्नवत् प्रदर्शित करेंगे।

$$\Pi^{*r+1}_{n;\ \alpha+1}(x, y).$$

§3. अतिरिक्त जनक सम्बन्ध

यहाँ अतिरिक्त जनक फलन तथा कुछ विशिष्ट दशायें व्यवकलित की गई हैं।

प्रमेय

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,\Pi^*_{n+s}(x,y)v^{s}t^{n}}{s!\,n!}=M\{1-vx^{-m}(t+v)^{m}\}^{-\alpha}$$

$$\cdot\, H^{1,r}_{\mathbf{p},\mathbf{q}+1}\left[\frac{-ay^{n_2}(t+v)}{\{1-vx^{-m}(t+v)^m\}^\beta}\middle|\begin{matrix}\{(a\mathbf{p},\ A\mathbf{p})\}\\ (b\mathbf{p},\ 1\{(b\mathbf{q}_{+1},\ B\mathbf{q}_{+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$\cdot\, H^{1,r}_{p,q+1}\left[\frac{-bx^{m_1}y^c\,(t+v)^{m_3}}{\{1-vx^{-m}(t+v)^m\}^r}\middle|\begin{matrix}\{(a_p,\ A_p)\}\\ (b_1,\ 1)\{(b_{q+1},\ B_{q+1})\}\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

उपपत्ति

(3.1) के बायें पक्ष को I से प्रदर्शित करके हम निम्नवत् लिख सकते हैं

$$\mathrm{I}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{n!\,\Pi^*{}_r(x,y)\,u^s t^{n-s}}{s!\,(n-s)\,!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Pi^*{}_n(x,y)\,(1+v/t)^n t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(t+v)^n\,\Pi^*{}_n(x,y) \tag{3.2}$$

(3.2) आसानी से (3.1) के दायें पक्ष के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है ।

विशिष्ट दशायें

(3.1) में समाहित विभिन्न प्राचलों को विशिष्ट मान प्रदान करके कई ज्ञात बहुपदी प्राप्त किये जा सकते हैं । इनमें से कुछ निम्नवत् हैं ।

(i) $m=1=\beta=a=x,\ \mathbf{p}=0=\mathbf{q},\ n_2=2,\ \alpha=\frac{1}{2},\ v=1,\ b=0$

से प्रतिस्थापित करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_{2n+2s}(y)v^s t^n}{2^{2n+2s}\,s!\,n!}=(1+t+v)^{-1/2}\,\exp\left(\frac{y^2(t+v)}{1+t+v}\right)$$

(ii) $\beta=v=1=x=m=n_2=1;\ \alpha=1+\lambda;\ \mathbf{p}=0=\mathbf{q};\ a=-1,\ b=0$

से प्रतिस्थापित करके तथा हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार करके संकलन कोटि का प्रतिलोमन करने पर हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होता है

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,L^{(\lambda)}_{n+s}(y)v^s t^n}{s!\,n!}=\frac{1}{(1-t-v)}\,1+\lambda\,\exp\,\left(\frac{y(t+v)}{t+v-1}\right)$$

(iii) $m=n_2=v=1a=y=\beta;\ \alpha=c_1;\ x=1/x;\ \mathbf{p}=2;\ \mathbf{q}=0=b,\ \mathbf{a}'_1=c_1;\ \mathbf{a}'_2=c_2$

से प्रतिस्थापित करके हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार करने के पश्चात् संकलन कोटि का प्रतिलोमन करने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,(c_1)_{n+s}\phi_{n+s}(x)v^s t^n}{s!\,n!}=(1-x(t+v))^{-c_1}\,{}_2F_0\left[\begin{matrix}c_1,\ x \\ -;\end{matrix}\ \frac{t+v}{1-x(t+v)}\right]$$

प्राप्त होता है।

(iv) $n_2=a=1=v=x=m=\mathbf{p}$; $\mathbf{q}=0$; $\mathbf{a}'_1=\frac{1}{2}$: $a=2=\beta$; $y=y-1$

से प्रतिस्थापित करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,\rho_{n+s}(y)v^s t^n}{s!\,n!}=(1-t-v)^{-1}\left\{1-\frac{2(y-1)\,(t+v)}{(1-t-v)^2}\right\}^{-1/2}$$

प्राप्त होता है।

(v) $a=1+c_1+d_1$; $1=v=x=m=n_2=\mathbf{q}$; $\mathbf{p}=2$; $\mathbf{a}'_1=\dfrac{1+c_1+d_1}{2}$

$\mathbf{a}'_2=\dfrac{2+c_1+d_1}{2}$; $\mathbf{b}'_1=1+c_1$; $a=2=\beta$; $b=0$; $y=\mathrm{y}-1$

से प्रतिस्थापित करके हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार तथा संकलन कोटि का प्रतिलोमन करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,(1+c_1+d_1)_{n+s}\,P_{n+s}^{(c_1,\,d_1)}(y)v^s t^s}{n!\,s!\,(1+c_1)_{n+s}}$$

$$=(1-t-v)^{-(1+c_1+d_1)}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}(1+c_1+d_1),\ \frac{1}{2}(2+c_1+d_1);\ (1+c_1); \\ \dfrac{2(y+1)(t+v)}{(1-t-v)^2}\end{matrix}\right]$$

प्राप्त होता है।

(vi) $a=2s$; $v=1=x=m=n_2=\mathbf{p}$; $\mathbf{q}=0$; $\mathbf{a}'_1=s$, $a=2=\beta$, $b=0$; $y=y-1$

लिखकर हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार करके संकलम कोटि का प्रतिलोमन करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\;C_{n+s}^{S}(y)v^s t^n}{s!\,n!}=(1-t-v)^{2s}\left\{1-\frac{2(y-1)\,(t+v)}{(1-t-v)^2}\right\}^{-s}$$

प्राप्त होता है।

(vii) $\alpha=1=\nu=x=m=n_2;\ a=-4;\ b=0:\ \beta=2$

से प्रतिस्थापित करके हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार तथा संकलन कोटि का प्रतिलोमन करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,F_{n+s}(y)v^st^n}{s!\,n!}=(1-t-v)^{-1}\ {}_pF_q\left[\begin{matrix}(a'p); & 4y(t+v)\\ (b'q); & \overline{(1-t-v)^2}\end{matrix}\right]$$

प्राप्त होता है।

(viii) $\alpha=1=\nu=x=m=n_2=p=q=b'_1;\ a'_1=\frac{1}{2};\ \beta=z;\ a=-4,\ b=0$

से प्रतिस्थापित करके हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार तथा संकलन कोटि का प्रतिलोमन करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,Z_{n+s}(y)v^st^n}{n!\,s!}=(1-t-v)^{-2}\ {}_1F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}; & 4v(t+v)\\ 1; & \overline{(1-t-v)^2}\end{matrix}\right]$$

(ix) $\alpha=1=\nu=x=m=n_2=q=b'_1=y;\ p=2,\ =\beta;\ a'_1=\frac{1}{2};\ a'_2=z+1/2,\ a=-4;\ b=0$

रखकर हाइपरज्यामितीय फलन का प्रसार करके संकलन कोटि का प्रतिलोमन करने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(n+s)!\,F_{n+s}(z)v^st^n}{n!\,s!}=\frac{1}{(1-t-v)}\ {}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{2},\ \frac{z+1}{2}\ ; & \\ & \frac{-4(t+v)}{(1-t-v)^2}\\ 1 & \end{matrix}\right]$$

प्राप्त होता है।

§4. बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x,y)\}$ का अपने पदों में प्रसार

यहाँ हम बहुपदी सेट $\{\Pi^*_n(x,y)\}$ को अपने ही पदों में प्रकट करते हैं।

प्रमेय 2

$\alpha>g$ तथा $\alpha<g$ के लिये

$$\Pi^*_n(x,y)=M\sum_{h=0}^{[n/m]}\frac{\Pi^*_{n-mh;g}(x,y)\ (\alpha-g)_h v^h\ x^{-mh}}{h!} \tag{4.1}$$

होता है। $\alpha<g$ के लिये हम कुछ शून्य पदों पर विचार करते हैं जिससे $\alpha>g$ की दशा जैसा व्यंजक प्राप्त होता हो।

उपपत्ति

(3.1) की सहायता से

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^*_n(x,y)t^n = M(1-vx^{-m}t^m)^{g-\alpha}(1-vx^{-m}t^m)^{-g}.$$

$$. H^{1,r}_{p,q+1}\left[\frac{-ay^{n_2}t}{(1-vx^{-m}t^m)^\beta}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, A_p)\} \\ (b_1, 1), \{b_{q+1}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$H^{1,r}_{p,q+1}\left[\frac{-bx^{-m_1}y^c t^{m_3}}{(1-vx^{-m}t^m)^r}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, A_p)\} \\ (b_1, 1), \{(q_{q+1}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$= M \sum_{n=0}^{\infty} \Pi^*_{n;g}(x,y)t^n \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\alpha-g)_h v^h x^{-mh} t^{mh}}{h!}$$

$$= M \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{[n/m]} \frac{\Pi^*_{n-mh;g}(x,y)(\alpha-g)_h v^h x^{-mh} t^n}{h!}$$

दोनों पक्षों से t^n के गुणांकों का तुलना करने पर (4.1) आसानी से प्राप्त हो जाता है ।

§5. अन्य सम्बन्ध

प्रमेय 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\Pi^*_n + \Pi^*_{n+1})\, t^n = M(1-vx^{-m}t^m)^{-\alpha}$$

$$. H^{1,r}_{p,q+1}\left[\frac{-ay^{n_2}t}{(1-vx^{-m}t^m)^\beta}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, A_p)\} \\ (b_1, 1), \{(b_{q+1}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$. H^{1,r}_{p,q+1}\left[\frac{-bx^{m_1}y^c t^{m_3}}{(1-vx^{-m}t^m)^r}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, A_p)\} \\ (b_1, 1), \{(b_{q+1}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$. \left(1+\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t} \qquad (5.1)$$

उपपत्ति

(5.1) के वाम पक्ष को I से प्रदर्शित करके निम्नवत् लिखा जा सकता है

$$I = M(1-vx^{-m}t^m)^{-\alpha} H^{1,r}_{p,q+1}\left[\frac{-ay^{n_2}t}{(1-vx^{-m}t^m)^\beta}\middle|\begin{matrix}\{(a_p, A_p)\} \\ (b_1, 1), \{(b_{q+2}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$\cdot\, H^{1,r}_{q,q+1}\left[\frac{-bx^{m_1}y^{c}t^{m_3}}{(1-vx^{-m}t^{m})^{r}}\left|\begin{matrix}\{(a_p, A_p\\(b_1, 1), \{b_{q+1}, B_{q+1})\}\end{matrix}\right.\right]$$

$$+1/t\left[\sum_{n=0}^{\infty}\Pi^*_n(x,y)t^n-\Pi^*_0(x,y)\right]$$

चूंकि $\Pi^*_0(x,y)=1$, अतः प्रमाण स्पष्ट है ।

विशिष्ट दशायें

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{H_{2n}(y)}{2^{2n}\, n!}+\frac{H_{2n+2}(y)}{2^{2n+2}.(n+1)!}\right]t^{n+1}=(1+t)^{1/2}\exp\left(\frac{y^2t}{1+t}\right)-1$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}(L_n^{(\lambda)}(y)+L_{n+1}^{(\lambda)}(y))^{n+1}=(1-t)^{-1-\lambda}(1+t)\exp\left(\frac{-yt}{1-t}\right)-1$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}((C_1)_n\phi_n(x)+(C_1)_{n+1}\phi_{n+1}(x))t^{n+1}=\frac{1+t}{(1-t)^{c_1}}\,{}_2F_0\left[\begin{matrix}c_1, x;\\ -;(t/1-tx)\end{matrix}\right]-1$

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty}(C_n^{s}(y)+C_{n+1}^{s+1}(y))t^{n+1}=\frac{1+t}{(1-t)^{2s}}\,{}_2F_0\left[\begin{matrix}s;\\ -;\end{matrix}\frac{2(y-1)t}{(1-t)^2}\right]-1$

(v) $\sum_{n=0}^{\infty}(P_n(y)+P_{n+1}(y))t^n=\frac{1+t}{t(1-2yt+t^2)^{1/2}}-1/t$

(vi) $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n(y)+U_{n+1}(y))t^n=\frac{1+t}{t(1-2yt+t^2)}-1/t$

(vii) $\sum_{n=0}^{\infty}(f_n(y)+f_{n+1}(y))t^{n+1}=\frac{1+l}{1-t}\,\mathrm{pFq}\left[\begin{matrix}(a'_p); & -4yt\\(b'q); & (1-t)^2\end{matrix}\right]$

(viii) $\sum_{n=0}^{\infty}(g_n(z)+g_{n+1}(z))t^{n+1}=\frac{1+t}{(1-t)^z}(1+t)^z-1$

(ix) $\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_n(x;\lambda)+\phi_{n+1}(x;\lambda))t^{n+1}=\frac{1+t}{1-t}\left[1-\frac{(e^{-\lambda}-1)t}{1-t}\right]^{-1-x}-1$

(x) $\sum_{n=0}^{\infty}(H_n(\xi,P,V)+H_{n+1}(\xi;P,V))t^{n+1}=\frac{1+t}{1-t}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\xi,\frac{1}{2};\\P;\ (-4vt/1-t^2)\end{matrix}\right]-1.$

§6. **प्रमेय 4**

रूपान्तरण [3; II, p. 444] तथा सूत्र

$$Q_1 = \frac{[(P^*_1(j))]_n (ay^{n_2})^n}{[(P^*_2(j))]_n \, n!}$$

को प्रयुक्त करके एवं $a \to 0$ की स्थिति में

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*m;\, m_1;\, -m_3;\, -;\, b;\, c;\, -;\, -;\, (1-(a'_p),\, 1)p}_{n;\, \alpha;\, -;\, \gamma;\, v;\, -;\, (1-(b'_q),\, 1)} (x, y) t^n$$

$$= (1 - vx^{-m}t^m)^{-\alpha} \, {}_pF_q \left[\begin{matrix} (a'_p); \\ (b'_q); \end{matrix} \frac{bx^{m_1} y^c t^{m_3}}{(1 - vx^{-m}t^m)^{\gamma}} \right] \tag{6.1}$$

उपप्रमेय 1

(5.1) में $m = m_1 = b = c = x = 1$; $v = -1$, $m_3 = \rho$; $\gamma = \sigma$; $p = r$; $q = s$: $y = (-1)^{\rho} x$ तथा α को $-\alpha$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1;\, 1;\, -;\, \rho;\, -;\, 1;\, 1;\, -;\, -;\, (1-(a'_r),\, 1);\, r}_{n;\, -\alpha;\, -;\, \sigma;\, -1;\, -;\, (1-(b'_s),\, 1} (1, (-1)^{\rho} X) t^n$$

$$= (1+t)^{\alpha} \, {}_rF_s \left[\begin{matrix} a'_1; \ldots; a'_r; \\ b'_1; \ldots; b'_s; \end{matrix} \frac{X(-t)^{\rho}}{(1+t)^{\sigma}} \right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \, {}_{r+\sigma}F_{s+\sigma} \left[\begin{matrix} a'_1, \ldots, a'_r, \triangle(\sigma-\rho; -\alpha+n), \triangle(\rho: -n); \\ b'_1, \ldots, b'_s, \triangle(\sigma; -\alpha); \\ \dfrac{(-\rho)^{\rho} (\sigma-\rho)^{\sigma-\rho} X}{(\sigma)^{\sigma}} \end{matrix} \right] f^n \tag{6.2}$$

प्राप्त होता है। यहाँ $\sigma \geqslant \rho$

उपर्युक्त जनक फलन की सहायता से कुछ विशिष्ट दशाओं में कई विशिष्ट फलन के लिये जनक फलन प्राप्त किये जा सकते हैं। उदाहरणस्वरूप चाण्डी[2] का जनक फलन (26) प्राप्त किया जा सकता है।

उपप्रमेय 2

(6.1) में $\alpha = c_1$, $m = c = y = 1$; $m_3 = \gamma = v = p = 2$; $b = -4$; $a'_1 = c_{1/2}$, $a'_2 = c_{1/2} + \frac{1}{2}$; $m_1 = q = 0$; $x = 1/x$ के लिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1; -; 2; -; 4; 1; -; -; (1-c_{1/2}, 1); (\frac{1}{2}-c_{1/2}, 1); 2}_{n: c_1; -; 2; 2; -; (1, 1)} (1/x, 1) t^n$$

$$=(1-2Xt)^{-c_1} {}_2F_0 \left[\begin{matrix} c_{1/2}, c_{1/2}+\frac{1}{2}; \\ -; \end{matrix} \frac{-4t^2}{(1-2Xt)^2}\right] \tag{6.3}$$

प्राप्त होता है। यह ब्रेफमैन[1] द्वारा प्राप्त निष्कर्ष है।

(5.3) में $c_1=1$ रखने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1; -; -; 2; -; -; 4; 1; -; -; (\frac{1}{2}, 1); (-, 1); 2}_{n; 1; -; 2; 2; -; (1, 1)} (1/x, 1)\, t^n$$

$$=(1-2xt)^{-1} {}_2F_0 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, 1; \\ --; \end{matrix} \frac{-4t^2}{(1-2xt)^2}\right] \tag{6.4}$$

ट्रूसडेल[10] का निष्कर्ष प्राप्त होता है।

उपप्रमेय 3

(5.1) में $m=c=b=v=x=1$, $\alpha=\lambda$ रखने तथा p को $p+m'$ से; $\{a'_m\}$ को $\triangle(m'; \lambda)$ से; $\{b_q\}$ को (β_q) से; $a'_{m'+1}, a'_{m'+2}, \ldots, a'_{m'+p}$ को $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ से; y को $f(x)$ से तथा $m_3=r=m'$ से प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित जनक सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1; m_1; -; m'; -; 1; 1; -; -; (1-(a'_{p+m'}), 1); (1-(\alpha_p), 1); p+m'}_{n; \lambda; -; m'; 1; -; (1-B_q, 1)} (1, f(x))\, t^n$$

$$=(1-t)^{-\lambda} {}_{p+m}F_q \left[\begin{matrix} \triangle(m'; \lambda), (\alpha_p); \\ (\beta_q); \end{matrix} f(x) \left(\frac{t}{1-t}\right)^{m'}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda+n-1}{n} {}_{p+m'}F_q \left[\begin{matrix} \triangle(m'; -n), \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p; \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q; \end{matrix} f(x)\right] t^n \tag{6.5}$$

यह श्रीवास्तव[9] द्वारा प्राप्त निष्कर्ष है।

उपप्रमेय 3 की विशिष्ट दशायें

यहाँ यह बताना सामयिक होगा कि (6.5) के साधारण विश्लेषण से हमें गोल्ड तथा हापर का व्यापकीकृत हरमाइट बहुपदी के लिये अपसारी जनक फलन प्राप्त होता है। अर्थात्

$$g_n^{m'}(X, h)=\sum_{k=0}^{[n/m']} \frac{n!}{k!\,(n-m'k)!} h^k X^{n-m'k}$$

(1) (6.5) में $p=q=0, f(x)=\frac{(m')^{m'}h}{X^{m'}}$ रखने तथा t को tX से प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1;\, m_1;\, -;\, m';\, -;\, 1;\, 1;\, -;\, -;\, (1-(a'_{m'}),\, 1);\, m'}_{n;\, \lambda;\, -;\, m';\, 1;\, -;\, 1;\, (1,\, 1)}\left(1,\ \frac{(m')^{m'} h}{X^{m'}}\right) t^n$$

$$=(1-Xt)^{-\lambda}\ {}_{m'}F_0\left[\begin{matrix}\triangle(m';\lambda);\\ -;\end{matrix}\left(\frac{m't}{1-Xt}\right)^{m'} h\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n-1}{n} g_n^{m'}(X, h)\, t^n \tag{5.6}$$

(2) (6.6) में X को vX से प्रतिस्थापित करके $h=1$ रखने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1;\, m_1;\, -;\, m;\, -;\, 1;\, 1;\, -;\, -;\, (1-(a'_{m'}),\, 1;\, m'}_{n;\, \lambda;\, -;\, m';\, 1;\, -;\, (1,\, 1)}\left(1,\ \frac{(m')^{m'}}{v_1^{m'} X^{m'}}\right) t^n$$

$$=(1-v_1Xt)^{-\lambda}\ {}_{m'}F_0\left[\begin{matrix}\triangle(m';\lambda);\\ -;\end{matrix}\left(\frac{m't}{1-v_1Xt}\right)^{m'}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda+n-1}{n} H_{n,m',v_1}(X)\, t^n \tag{6.7}$$

जहाँ

$$H_{n,m',v_1}(X)=\sum_{k=0}^{[n/m']}\frac{(-1)^k v_1^{n-m'k} X^{n-m'k}}{k!\,(n-m'k)!}.$$

उपर्युक्त निष्कर्ष लाहिरी[7] द्वारा प्राप्त किया गया था।

§7. **अन्य जनक सम्बन्ध**

प्रमेय 5

$\beta=m=1$ तथा $b=0$ के लिये

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1;\, -;\, n_2;\, -;\, a;\, 0;\, -;\, (\mathbf{ap},\, \mathbf{Ap});\, r;\, -;\, -;}_{n;\, \alpha;\, 1;\, -;\, v;\, (\mathbf{bq}_{+1},\, \mathbf{Bq}_{+1});\, -;}\ \frac{(x, y)t^n}{\alpha+\mathbf{b}_1)_n}$$

$$=e^{vt/x}\sum_{j=1}^{\mathbf{p}}\mathbf{A}_j\ F\sum_{j=2}^{\mathbf{q}_{+1}}\mathbf{B}_j+1\left[\begin{matrix}(\mathbf{P}_1(i,j)),\ (1-\mathbf{P}_3(i,j));\\ (\mathbf{P}_2(i,j)),\ \alpha+\mathbf{b}_1;\end{matrix}\ aE_1\, y^{n_2 t}\right]$$

जहाँ

$$E_1 = \prod_{j=1}^{\mathbf{p}} \mathbf{A}_j^{\mathbf{A}_j} \Big/ \prod_{j=2}^{\mathbf{q}+1} \mathbf{B}_j^{\mathbf{B}_j} (-1) \sum_{j=\mathbf{r}+1}^{\mathbf{p}} \mathbf{A}_j \tag{7.1}$$

होता है ।

उपपत्ति

(7.1) के वाम पक्ष को I से प्रदर्शित करने पर

$$I = \sum_{n=0}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[(\mathbf{P}_1(i,j)]_{n-s}\,[1-(\mathbf{P}_3(i,j)]_{n-s}(\alpha+\mathbf{b}_1+n-s)_s}{[(\mathbf{P}_2(i,j)]_{n-s}\, s!\,(n-s)!\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_n} \cdot (a\,E_1\,y^{n_2})^{n-s}\,x^{-s}\,v^s\,t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[(P_1(i,j)]_n\,[1-(\mathbf{P}_3(i,j))]_n\,(aE_1y^{n_2})^n x^{-s} v^s t^{n+s}}{[(\mathbf{P}(i,j))]_n\, s!\, n!\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_n}$$

=(7.1) का दक्षिण पक्ष ।

उपप्रमेय

(7.1) में सूत्र

$$Q_1 = \frac{[(\mathbf{P}_1{}^*(j))]_n\,(ay^{n_2})^n}{[(\mathbf{P}_2{}^*(j))]_n\, n!}$$

प्रयुक्त करने पर हमें

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pi^{*1;-;n_2;-;a;o;-;(1-\mathbf{ap}),1);\mathbf{p};-;-;}_{n;\alpha;1;-;v;(1-\mathbf{bq}),1);-;} \frac{(x,y)t^n}{(\alpha)_n}$$

$$= e^{vt/x}\, {}_{\mathbf{p}}F_{\mathbf{q}+1}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a'p});\\(\mathbf{b'q}),\ \alpha;\end{matrix}\ ay^{n_2}t\right] \tag{7.2}$$

(7.2) की विशिष्ट दशायें

§2 की की विशिष्ट दशाओं (i), (ii), (iii) में प्रयुक्त मानों को (7.2) में रखने पर हमें निम्नलिखित रोचक निष्कर्ष प्राप्त होते हैं

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n}(y)t^n}{n!\,2^{2n}(\frac{1}{2})_n} = e^{-t}\,{}_0F_1\left[\begin{matrix}-;\\ \frac{1}{2};\end{matrix}\ y^2\right]$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\lambda)}(y)t^n}{(1+\lambda)_n} = e^t\,{}_0F_1\left[\begin{matrix}-;\\ 1+\lambda;\end{matrix}\ -yt\right]$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(X) t^n = e^{Xt}\ {}_1F_0 \left[\begin{matrix} X; \\ - \end{matrix}\ t\right]$

8. $\Pi^*(x, y)$ का हरमाइट बहुपदी के पदों में प्रसार

यहाँ हम बहुपदी को इसके कुछ प्राचलों को ज्ञात हरमाइट बहुपदी के पदों में परिवर्तित करके प्रदर्शित करते हैं।

प्रमेय 6 (A)

$m = n_2 = \beta = 1$ तथा $b = 0$ के लिये

$$\Pi^{*1;\, -;\, 1;\, -;\, a;\, o:\, -;\, (\mathbf{a_p}, \mathbf{A_p});\, \mathbf{r};\, -;\, -:}_{n;\, \alpha;\, 1;\, -;\, v;\, (\mathbf{b_{q+1}}, \mathbf{B_{q+1}});\, -;} (x, y)$$

$$\sum_{s=0}^{n} \sum_{h=0}^{[n/2]} \frac{H_{n-s-2h}(v/2x)\, [(\mathbf{P}_1(i, j))]_s\, [1-\mathbf{P}_3(i, j))]_s}{h!\, s!\, (n-s)!\, [(\mathbf{P}_2(i, j))]_s\, (\alpha+\mathbf{b})_{1s}}$$

$$\cdot\, (aEy)^s\, 2^{2a} \left(\frac{-n+s}{2}\right)_h \left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_n (\alpha+\mathbf{b}_1)_n. \tag{8.1}$$

उपपत्ति

हम सम्बन्ध (7.1) को निम्नवत् लिख सकते हैं

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pi^{*1;\, -;\, 1;\, -;\, a;\, o;\, -:\, (\mathbf{a_p}, \mathbf{A_p});\, \mathbf{r};\, -;\, -;}_{n;\, \alpha;\, 1;\, -;\, v;\, (\mathbf{b_{q+1}}, \mathbf{B_{q+1}});\, -;} \frac{(x, y)\, t^n}{(\alpha+{}_1\mathbf{b})_n}$$

$$= e^{vt/x}\, e^{t^2}\, F\left[\begin{matrix} (\mathbf{P}_1(i, j)), (1-(\mathbf{P}_3(i, j))); \\ (\mathbf{P}_2(i, j)), \alpha+\mathbf{b}; \end{matrix}\ aE_1)\, t\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(v/2x) t^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2h}}{h!} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[\mathbf{P}_1(i, j))]_s\, [1-(\mathbf{P}_3(i, j))]_s}{s!\, (\alpha+\mathbf{b}_1)_s\, [(\mathbf{P}_2(i, j))]_s} \cdot (aEy)^s \cdot t^s.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H_n(v/2x)\, [(\mathbf{P}_1(i, j))]_s\, [1-(\mathbf{P}_3(i, j))]_s))]_s\, (aE_1y)^s\, t^{n2+h+s}}{n!\, h!\, s!\, (\alpha+\mathbf{b}_1)_s\, [(\mathbf{P}_2(i, j))]_s}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{n} \sum_{h=0}^{[n/2]} \frac{H_{n-s-2h}(v/2x).[(\mathbf{P}_1(i, j)]_s\, [1-(\mathbf{P}_3(i, j))]_s 2^{2h}. \left(\frac{-n+s}{2}\right)_h \cdot \left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h}{h!\, s!\, (n-s)!\, (\alpha+\mathbf{b}_1)_s\, [(\mathbf{P}_2(i, j))]_s\, (aE_1y)^{-s}} . t^n$$

दोनों पक्षों से t^n के गुणक को सकीकृत करने पर हमें निष्कर्ष (8.1) प्राप्त होता है।

(8.1) की विशिष्ट दशायें

(8.1) के विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

$$\text{(i)} \quad H_{2n}(y)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(-\tfrac{1}{2})y^{2s}2^{2h}\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h . 2^{2n} . n!(\tfrac{1}{2})_n\left(\frac{-n+s+1)_h}{2}\right)_h}{h!\; s!\; (n-s)!\; (\tfrac{1}{2})_s}$$

$$\text{(ii)} \quad L_n^{(\lambda)}(y)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(\tfrac{1}{2})(y)^s 2^{2k}\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h . \left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h (1+\lambda)_n}{h!\; s!\; (n-s)!\; (1+\lambda)_s}$$

$$\text{(iii)} \quad \phi_n(X)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(X/2)\;(X)_s 2^{2h}\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h}{h!\; s!\; (n-s)!\; (1+\lambda)_s}$$

$$\text{(iv)} \quad \phi_n(X,\lambda)=$$

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(\tfrac{1}{2})1(1+X)_s(e^{-\lambda}-1)^s .\; 2^{2h} .\; n!\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h . \left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h}{h!\; s!\; (n-s)!}$$

प्रमेय 6 (B)

$m=n_2=\beta=1$ तथा $b=0$ के लिये

$$\Pi^{*\,1;\,-;\,1;\,-;\,a;\,o;\,-;\,(\mathbf{a_p},\,\mathbf{A_p});\,\mathbf{r};\,-;\,-;}_{n;\,a;\,1;\,-;\,v;\,(\mathbf{b q_{+1}},\,\mathbf{B q_{+1}});\,-;}(x,y)$$

$$=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-k-2h}(v/4x)\;.\;H_k(v/4x)\;.\;[(\mathbf{P}_1(i,j))]_s\;2^{3h}}{s!\;k!\;h!\;(n-s-k)!\;(a+\mathbf{b}_1)_s\;[(\mathbf{P}_2(i,j))]_s}$$

$$.\;[1-(\mathbf{P}_3(i,j))]_s\;.\;\left(\frac{-n+s+k+1}{2}\right)_h\;.\;\left(\frac{-n+s+k}{2}\right)_h(a+\mathbf{b}_1)_n\;.\;(aE_1y)^s. \qquad (8.2)$$

होता है।

उपपत्ति

हम (7.1) को निम्नवत् लिखते हैं।

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Pi^{*1;\,-;\,1;\,-;\,a;\,o;\,-;\,(\mathbf{a_p},\,\mathbf{A_p});\,\mathbf{r};\,-;\,-;}_{n;\,a;\,1;\,-;\,v;\,(\mathbf{b q_{+1}},\,\mathbf{B q_{+1}});\,-;}\frac{(x,\;)t^n}{(a+\mathbf{b}_1)_n}$$

$$=e^{vt/x}-2t^2e^{2t2}\,F\left[\begin{matrix}(\mathbf{P}_1(i,j)),\ (1-(\mathbf{P}_3(i,j)));\\ (\mathbf{P}_2(i,j)),\ a+\mathbf{b}_2;\end{matrix}\ aE_1\,y^t\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{n-k}(v/4x)\,.\,H_k(v/4x)\,t^n}{(n-k)!\,k!}\,.\sum_{h=0}^{\infty}\frac{2^h\,t^{2h}}{h!}$$

$$.\sum_{s=0}^{\infty}\frac{[(\mathbf{P}_1(i,j)]_s\,[1-(\mathbf{P}_3(i,j))]_s\,(aE_1y)^s\,t^s}{s!\,(a+\mathbf{b}_1)_s\,[(\mathbf{P}_2(i,j))]_s}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{H_{n-k}(v/4x)H_k(v/4x)[(\mathbf{P}_1(i,j)]_s[(1'(\mathbf{P}_3(i,j))]_s\,.\,2^h(aE_,y)^s\,.\,t^{n+2h+s}}{(n-k)!\,k!\,s!\,h!\,(a+\mathbf{b}_1)_s\,[(\mathbf{P}_2(i,j))]_s}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n-2]}$$

$$\frac{H_{n-s-k-2h}(v/4x)\,.\,H_k(v/4x)\,.\,[(\mathbf{P}_1(i,j)]_s\,[1-(\mathbf{P}_3(i,j))]_s\left(\frac{-n+s+k}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+k+1}{2}\right)_h 2^{3h}}{(n-s-k)!\,k!\,s!\,h!\,(a+\mathbf{b}_1)_s\,[\mathbf{P}_2(i,j)]_s}$$

$$.\,(aE_1y)^s\,.\,t^n$$

दोनों पक्षों से t^n के गुणक को समीकृत करने पर हमें (8.2) प्राप्त हो जाता है ।

विशिष्ट दशायें

(i) $$L_n^{(\lambda)}(y)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-k-2h}(\frac{1}{4})\,.\,H_k(\frac{1}{4})}{s!\,k!\,h!\,(n-s-k)\,!}\,.\,\frac{\left(\frac{-n+s+k}{2}\right)_h}{(1+\lambda)_s}$$

$$\left(\frac{-n+s+k+1}{2}\right)_h\,.\,2^{3h}\,.\,(1+\lambda)_n\,.\,(-y)^s$$

(ii) $\phi_n(X)$

$$=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-k-2h}(X/4)\,.\,H_k(X/4)-(X)_s\left(\frac{-n+s+k}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+k+1}{2}\right)\,.\,2^{3h}}{s!\,k!\,h!\,(n-s-k)\,!}$$

(iii) $\phi_n(X,\lambda)$

$$=\sum_{s=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n-2]}\frac{H_{n-s-k-2h}(\frac{1}{4})\,.\,H_k(\frac{1}{4})(1+X)_s\,.\left(\frac{-n+s+k}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+k+1}{2}\right)_h\,.\,2^{3h}}{s!\,s!\,k!\,(n-s-k)!\,h!}$$

$$.\,2^{3h}\,.\,n!\,.\,(e^{-\lambda}-1)^s.$$

§9 प्रमेय 7

$m=1=n_2=\beta$ तथा $b=0$ के लिये

$$\Pi^{*1;\ -;\ 1;\ -;\ a:\ o;\ -;\ (\mathbf{ap},\ \mathbf{Ap});\ \mathbf{r}:\ -;\ -;}_{n;\ \alpha;\ 1;\ v;\ (\mathbf{bq}_{+1},\ \mathbf{Bq}_{+1})}(x, y)$$

$$=\sum_{h=0}^{[n/2]}\sum_{s=0}^{n}\frac{H_{n-s-2h}\cdot(v/x)\,[\mathbf{P}_2(i,j)]_s\,[1-(\mathbf{P}_3(i,j))]_s\cdot\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h}{(n-s)!\ s!\ h!\ [(\mathbf{P}_2(i,j))]_s\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_s}$$

$$\cdot\left(\frac{-n+s+k)}{2}\right)_h\cdot 2^h\cdot(aE_1y)^s\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_n \tag{9.1}$$

जहाँ $H_n(x)$ जैक्सन बहुपदी [6] कहलाता है ।

उपपत्ति

(7.1) को हम निम्नवत् लिख सकते हैं ।

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Pi^{*1;\ -;\ 1;\ -;\ a;\ o:\ -;\ (\mathbf{ap},\ \mathbf{Ap});\ \mathbf{r};\ -;\ -;}_{n;\ \alpha;\ 1;\ -;\ v;\ (\mathbf{bq}_{+1},\ \mathbf{Bq}_{+1});\ -:}(x,y)\,t^n}{(\alpha+\mathbf{b}_1)_n}$$

$$=e^{v/xt-1/2t2}\cdot e^{1/2t2}\,F\left[\begin{matrix}(\mathbf{P}_1(i,j)),\ (1-(\mathbf{P}_3(l,j));\\(\mathbf{P}_2(i,j)),\ \alpha+\mathbf{b}_1;\end{matrix}\ aE_1yt\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(v/x)\,t^n}{n!}\cdot\sum_{h=0}^{n}\frac{(\frac{1}{2})^h\,t^{2h}}{h!}\cdot\sum_{s=0}^{\infty}\frac{[(\mathbf{P}_1(i,j)]_s\,[-1(\mathbf{P}_3(i,j))_s}{s!\ [(\mathbf{P}_2(i,j)]_s\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_s}\cdot(aEy)^s.t^s.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{H_n(v/x)[(\mathbf{P}_1(i,j))]_s\,[7-(\mathbf{P}_3(i,j))_s\cdot(\frac{1}{2})^h\cdot(aE_1y)^s\cdot t^{n+2h+s}}{n!\ s!\ a!\ [(\mathbf{P}_2(i,j))]_s\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_s}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{n}\sum_{h-0}^{[n/2]}$$

$$\frac{H_{n-s-2h}(v/x)\cdot[(\mathbf{P}_1(i,j))]_s\,[1-(\mathbf{P}_3(i,j))]_s\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h\cdot 2^h.\,(aE_1y)^s}{(n-s)!\ s!\ h!\ [(\mathbf{P}_2(i,j))]_s\,(\alpha+\mathbf{b}_1)_s}\cdot t^n$$

दोनों पक्षों से t^n के गुणकों की तुलना करने पर हमें (9.1) आसानी से प्राप्त हो जाता है ।

विशिष्ट दशायें

(9.1) में प्रयुक्त विभिन्न प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमें निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त होते हैं

(i) $$H_{2n}(y)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(-1)\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h\cdot 2^h\cdot y^{2s}\cdot(\tfrac{1}{2})_n\cdot 2^{2n}\cdot n!}{s!\,h!\,(n-s)!\,(\tfrac{1}{2})_s}$$

(ii) $$L_n^{(\lambda)}=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(1)\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h\cdot 2^h\,(-y)^s(1+\lambda)_n}{s!\,h!\,(n-s)!\,(1+\lambda)_s}$$

(iii) $$\phi_n(X)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(X)\cdot(X)_s\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h\cdot 2^h}{s!\,h!\,(n-s)!}$$

(iv) $$\phi_n(X,\lambda)=\sum_{n=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(1)\cdot(1+X)_s\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h\cdot 2^h(e^{-\lambda}-1)^s\cdot n!}{s!\,h!\cdot(n-s)!\,s!}$$

(v) $$S_n(x)=\sum_{s=0}^{n}\sum_{h=0}^{[n/2]}\frac{H_{n-s-2h}(1/x)\,[(a_p)]_s\left(\frac{-n+s}{2}\right)_h\left(\frac{-n+s+1}{2}\right)_h\cdot 2^h\cdot(-1)^s(c_1)_{2n}x^n}{s!\,h!\,(n-s)!\,[(\beta_q)]_s\,(c_1)_{n+s}}$$

निर्देश

1. ब्रैफमैन, एफ०, **प्रोसी० अमे० मैथ० सोसा०**, 1951, **2**, 942-949.

2. चाण्डी, टी० डब्ल्यू०, **क्वार्ट० जर्न० मैथ० आक्सफोर्ड सिरीज**, 1941, **14**, 55-78.

3. एर्डेल्यी, ए०, Tables of integral transforms vol. I, II. Bateman Manuscript Project, California, Institute of Technology 1954.

4. फॉक्स, सी०, **ट्रान्स० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429.

5. गाउल्ड, एच० डब्ल्यू० तथा ए० टी० हापर, **ड्यूक मैथ० जर्न०**, 1962, **29**, 51-63.

6. जैक्सन, डी०, **मैथ० एशो० अमे० स्टेट यूनि० अमे०**, 1941.

7. लाहिरी, एम०, **शोध प्रबन्ध**, बी० एच० यू०, 1966.

8. शाह, एम० एल०, **बुल ०स्ट० टेक० पॉली० सिरीज ०मैट० फिज० मेक० थि० एप्ल०**, 1970, 15 (29), 103-114.

9. श्रीवास्तव, एच० एम०, **वही**, 1971, 35(1)

10. ट्रूसडेल, सी०, **प्रोसी० नेश० एक० साइंस, यू० एस० ए०**, 1947, **33**, 82-93.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में पंचसंयोजी वैनेडियम द्वारा L-सिस्टिन के आक्सीकरण की गतिकी तथा क्रियाविधि

ए० पी० पयासी
जनता महाविद्यालय, रीवां
और
के० शर्मा तथा वी० के० शर्मा
रसायन विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवां

[प्राप्त— जुलाई 27, 1984]

सारांश

सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में पंचसंयोजी वैनेडियम द्वारा L-सिस्टिन के आक्सीकरण की गतिकी का अध्ययन स्थिर आयनिक शक्ति पर किया गया। अभिक्रिया V(V), सिस्टिन और H^+ के प्रति प्रथम कोटि की है। क्रिया की दर पर $NaHSO_4$ और Na_2SO_4 के सान्द्रण के प्रभाव का अध्ययन किया गया। क्रिया पर परावैद्युतांक का प्रभाव देखा गया एवं सक्रियकरण प्राचल E, A तथा $\triangle S$ के मान की गणना की गई। प्रयोगिक परिणामों की व्याख्या हेतु अभिक्रिया की सम्भावित क्रियाविधि प्रस्तावित की गई है।

Abstract

Kinetics and mechanism of oxidation of L-cystine by quinquevalent vanadium in sulphuric acid medium. *By* A. P. Payasi, Janta Colloge, Rewa, and K. Sharma and V. K. Sharma, Department of Chemistry, Government Science College, Rewa, (M. P.).

Kinetic study of oxidation of L-cystine by quinquevalent vanadium has been investigated at constant ionic strength in sulphuric acid medium. The reaction is first order dependence in V (v), cystine and H^+ each. The effect of $NaHSO_4$, $Na_2 SO_4$ and dielectric constant of the medium on the rate have been examined. Activation parameters have also been computed. A probable mechanism is suggested on the basis of the experimental results.

α-ऐमीनो अम्ल जैसे जैवरासायनिक महत्व के यौगिकों के आक्सीकरण का गतिक अध्ययन विभिन्न धातु आयनों द्वारा किया गया है[1-5]। यद्यपि पंचसंयोजी वैनेडियम द्वारा बहुसंख्यक यौगिकों का अध्ययन किया गया है फिर भी इसके द्वारा α-ऐमीनो अम्ल के आक्सीकरण की गतिकी का अध्ययन बहुत कम हुआ है। इस प्रपत्र में V(v) द्वारा सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में L-सिस्टिन के आक्सीकरण क्रिया का गतिक अध्ययन एवं क्रियाविधि प्रस्तुत की गई है।

प्रयोगात्मक

वैनेडियम (V) का संग्रह विलयन अमोनियम मेटावैनेडेट (रिडिल) को उपर्युक्त सान्द्रता वाले सल्फ्यूरिक अम्ल में घोलकर तैयार किया गया। इस विलयन का प्रमाणीकरण फेरस अमोनियम सल्फेट विलयन द्वारा *N*-फेनिल एन्थ्रेनिलिक अम्ल सूचक प्रयुक्त कर किया गया। सिस्टिन का विलयन ज्ञात सान्द्रता के सल्फ्यूरिक अम्ल में बनाया गया। सभी प्रयुक्त अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे।

वैनेडियम (V) तथा आधारी विलयनों के परिकलित आयतन को तापस्थायी में वांछित ताप पर रखकर मिलाया गया। अभिक्रिया के वेग का निर्धारण निश्चित समयान्तराल में अभिक्रिया मिश्रण का ज्ञात आयतन लेकर मानक फेरस अमोनियम सल्फेट विलयन के द्वारा अवशेष V(V) अनुमापित करके किया गया। इसके लिये *N*-फेनिल एन्थ्रेनिलिक अम्ल सूचक में प्रयुक्त किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

(अ) आक्सीकारक की सान्द्रता का प्रभाव :

सभी प्रेक्षण छद्म प्रथम कोटि की दशा ([सिस्टिन] और [सल्फ्यूरिक अम्ल] $\gg$ [वैनेडियम (V)]) के अन्तर्गत स्थिर आयनिक शक्ति पर किये गये। वैनेडियम (V) के विभिन्न प्रारम्भिक सान्द्रणों के लिये छद्म प्रथम कोटि दर स्थिरांक स्थिर रहा। इस प्रकार वैनेडियम (V) के प्रति क्रिया की कोटि 1 प्राप्त हुई (सारणी-1)। log [V(V)] एवं समय के विपरीत आलेख से भी इस निष्कर्ष की पुष्टि होती है।

सारणी 1

[सिस्टिन]$=5{\cdot}0\times10^{-2}$M, [H_2SO_4]$=3{\cdot}0$M, $\mu=3{\cdot}01$M, ताप$=60°$C

V(V)] 10^3M	6·66	8·33	10·00	12·50	20·00
10^3k_1 min^{-1}	4·80	4·72	4·78	4·86	4·83

(ब) सिस्टिन की सान्द्रता का प्रभाव :

सिस्टिन की सान्द्रता में वृद्धि के साथ छद्म प्रथम कोटि दर स्थिरांक क्रमशः बढ़ता है परन्तु द्वितीय कोटि दर स्थिरांक k_2 मान लगभग स्थिर रहता है (सारणी 2) जो यह दर्शाता है कि आधारी के प्रति भी क्रिया की कोटि एक है।

सारणी 2

$[V(V)]=10{\cdot}0\times10^{-2}M$,		$[H_2SO_4]$	$=3{\cdot}0M$,	$\mu=3{\cdot}01M$,	ताप$=60°C$
[सिस्टिन]					
10^2M	5·00	3·30	2·50	1·66	1·25
$10^2k_1\ min^{-1}$	4·78	3·10	2·41	1·59	0·82
10^2k_2					
$l\ mole^{-1}\ min^{-1}$	9·52	9·40	9·64	9·61	9·67

$\log k_1$ व $\log$ [सिस्टिन] के बीचे गये आलेख (ढलान 0·91) से भी क्रिया की कोटि एक होने की पुष्टि होती है। k_1^{-1} व $[\text{सिस्टिन}]^{-1}$ के बीच खींचे गये आलेख में y-अक्ष पर बनने वाले अंत:-खंड से आक्सीकारक एवं आधारी के मध्य संकर यौगिक के निर्माण का संकेत मिलता है।

(स) क्रिया पर अम्लता का प्रभाव :

आक्सीकरण अभिक्रिया पर अम्लीयता का प्रभाव ज्ञात किया गया। इसके लिये स्थिर आयनिक शक्ति पर आक्सीकारक एवं आधारी की निश्चित सान्द्रता पर सल्फ्यूरिक अम्ल के विभिन्न सान्द्रता लेकर अभिक्रिया की दर ज्ञात की गई।

सारणी 3

$[V(V)]$	$=10\times10^{-2}M$	[सिस्टीन]	$=5{\cdot}0\times10^{-2}M$,	$\mu=3{\cdot}51M$	ताप$=60°C$
$[H_2SO_4]M$	1·5	2·0	2·5	3·0	3·5
$10^3k_1\ min^{-1}$	2·40	3·29	4·02	4·90	5·95
10^4k_2					
$l\ mole^{-1}\ min^{-1}$	1·60	1·69	1·61	1·63	1·70

उपर्युक्त सारणी से स्पष्ट है कि हाइड्रोजन आयन की सान्द्रता बढ़ने के साथ-साथ छद्म प्रथम कोटि दर स्थिरांक बढ़ता है परन्तु $k_2(k_1=k_1/[H^+])$ का मान स्थिर रहता है। k_1 व $[H^+]$ के विपक्ष आलेख खींचने पर रेखा प्राप्त होती है जो कि मूल बिन्दु से निकलती है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि अभिक्रिया की कोटि H^+ के सापेक्ष एक है और अभिक्रिया अम्ल उत्प्रेरित है परन्तु H^+ पर आधारित नहीं है। अभिक्रिया हैमिट फलन का पूर्णतया पालन करती है।

ऐसीटिक अम्ल-जल के विभिन्न संघटनों के मिश्रण लेकर अभिक्रिया मिश्रण के परावैद्युतांक में परिवर्तन करने पर यह पाया गया कि परावैद्युतांक घटने के साथ-साथ दर स्थिरांक बढ़ता है। $\log k_1$

व 1/D के विपक्ष आलेख खींचने पर सरल रेखा प्राप्त होती है जो कि क्रिया के आयन-द्विध्रुव होने का संकेत देती है।

स्थिर H^+ पर अभिक्रिया मिश्रण में सोडियम बाइसल्फेट एवं सोडियम सल्फेट डालने पर दर स्थिरांक में वृद्धि होती है।

(द) ताप का प्रभाव

क्रिया का अध्ययन चार विभिन्न तापों पर किया गया। $\log k_1$ के विरुद्ध 1/T के आलेख की रैखिकता यह सूचित करती है कि अभिक्रिया आरेनियस समीकरण का पालन करती है। E, A एवं $\triangle S$ के मान क्रमशः 16·126 Kcal $mole^{-1}$, $10{\cdot}5543 \times 10^{11}$ Sec^{-1} और — 3·68 e. v. प्राप्त हुये।

अन्तिम क्रियाफल सल्फोक्साइड गुणात्मक विश्लेषण द्वारा पहचाना गया। क्रिया में 1 अणु सिस्टन 4 अणु V(V) के साथ संयोग करती है।

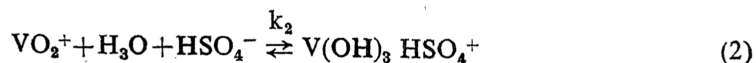
क्रियाविधि

अम्लीय माध्यम में वैनेडियम VO_2^+ के रूप में रहता है।[6] अम्ल की उच्च सान्द्रता (<4·5M) पर सक्रिय प्रजाति[7] $V(OH)_3^{2+}$ है जो सल्फ्यूरिक अम्ल माध्यम में $V(OH)_3\,HSO_4^+$ अभिक्रिया प्रजाति भी देती है[8]।

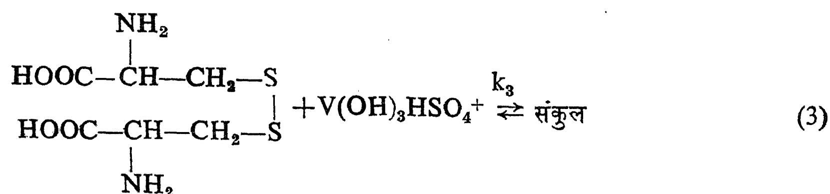
सिस्टिन में नाइट्रोजन व सल्फर दोनों ही संकुल निर्माण में दाता परमाणु का व्यवहार कर सकते हैं पर चूंकि सल्फर नाइट्रोजन की तुलना में अधिक न्यूक्लियोफिलिक प्रकृति का होता है अतः यह अधिक सुगमता से इलेक्ट्रोफिलिक वैनेडियम के साथ संकुल बनाता है जो वेग निर्धारण पद में विघटित होकर माध्यमिक आयन देता है। इन तथ्यों को ध्यान में रखते हुये निम्नलिखित क्रियाविधि प्रस्तुत की जा सकती है।



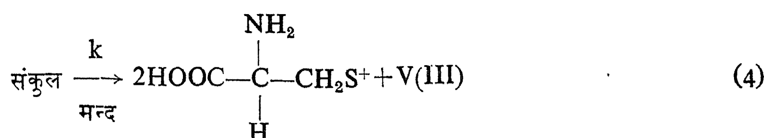
$$VO_2^+ + H_3O^+ \underset{}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} V(OH)_3^{2+} \qquad (1)$$



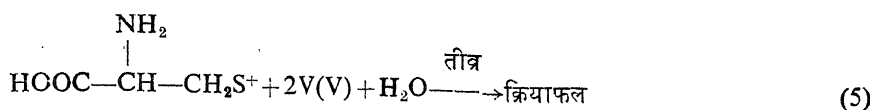
$$VO_2^+ + H_3O + HSO_4^- \overset{k_2}{\rightleftharpoons} V(OH)_3\,HSO_4^+ \qquad (2)$$



$$\begin{array}{l} HOOC-CH(NH_2)-CH_2-S \\ HOOC-CH(NH_2)-CH_2-S \end{array} + V(OH)_3HSO_4^+ \overset{k_3}{\rightleftharpoons} \text{संकुल} \qquad (3)$$



$$\text{संकुल} \xrightarrow[\text{मन्द}]{k} 2HOOC-\underset{H}{\overset{NH_2}{C}}-CH_2S^+ + V(III) \quad (4)$$



$$HOOC-\overset{NH_2}{CH}-CH_2S^+ + 2V(V) + H_2O \xrightarrow{\text{तीव्र}} \text{क्रियाफल} \quad (5)$$



$$V(III) + V(V) \longrightarrow V(IV) \quad (6)$$

उपर्युक्त क्रियाविधि से निम्नलिखित समीकरण व्युत्पन्न किया जा सकता है।

$$k_{obs} = \frac{k\, k_1 k_2 k_3\, [\text{Cystine}]\, [H_3O^+]\, [HSO_4^-]}{1 + K_2\, [H_3O^+]\, [HSO_4^-] + K_2 K_3\, [\text{Cystine}]\, [H_3O^+][HSO_4^-]} \quad (7)$$

समीकरण (7) सभी प्रयोगिक तथ्यों को स्पष्ट करता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

एक लेखक (ए० पी० पायसी) यू० जी० सी० नई दिल्ली द्वारा प्रदत्त आर्थिक सहायता के लिये आभारी है।

निर्देश

1. रेड्डी, के० वी०, सेथूराम, बी० तथा नवनीत, राव टी०, **इन्डि० जर्न० केमेस्ट्री**, 1981, **20A**, 395.

2. शेख, आर० ए० तथा वाटर्स, डब्ल्यू० ए०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1970, 988.

3. गोस्वामी, के० बी०, चन्द्रा, जी० तथा श्रीवास्तव, एन० एस०, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०**, 1981, **58**, 252.

4. श्रीवास्तव, वी० के०, श्रीवास्तव, के० के०, श्रीवास्तव, एम० एन० तथा सक्सेना, बी० बी० एल०, **इन्डि० जर्न० केमिस्ट्री**, 1980, **19A**, 1011.

5. बेग, आई० तथा कमालुद्दीन, एम० ए०, **आक्टा० किम० एकेड० साइंस हन्ग०**, 1975, **86**, 65.

6. रोसौती, एफ० जे० सी० तथा रोसौती एच०, **एक्टा० केम० स्कैन्ड**, 1959, **13**, 1971.

7. वाटर्स, डब्ल्यू० ए० तथा लिटलर, जे० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1959, 3014, 4046.

8. मेहरोत्रा, आर० एन०, **जर्न० केमि० सोसा० (बी०)**, 1968, 1563

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

विषकारी सायनोजनी ग्लायकोसाइडों का मटर प्रजातियों में जैवरासायनिक अध्ययन

चन्द्र प्रकाश अवस्थी
फसल कार्यिकी एवं जीवरसायन विभाग,
चन्द्रशेखर आजाद कृषि एवं प्रौद्योगिकी विश्वविद्यालय, कानपुर

[प्राप्त–अगस्त 9, 1985]

सारांश

समन्वित एवं राज्यस्तरीय प्रजातीय परीक्षण योजना के अन्तर्गत वर्ष 1975-76 तथा 1976-77 में सम्मिलित 25 उन्नतिशील मटर प्रजातियों में विषकारी पदार्थ (सायनोजनी ग्लायको-साइडों) का तुलनात्मक अध्ययन किया गया। विभिन्न प्रजातियों में इसकी मात्रा 0·54 मि० ग्राम से 2·40 मि० ग्राम प्रति सौ ग्राम पायी गयी जो मनुष्य की जीवन सुरक्षा नियन्त्रण सीमा 20 मि० ग्राम प्रति व्यक्ति के हिसाब से बहुत कम थी। मटर की प्रजातियाँ 6113, टी/01-2, के-9, पी० एस-60 तथा संस्तुत प्रजाति (टी-163) में इस पदार्थ की उपस्थिति सबसे कम पायी गयी। इससे यह विदित होता है कि विषकारी पदार्थ मटर प्रजातियों में अत्यल्प मात्रा में होने के कारण मानव पोषण एवं स्वास्थ्य के लिये हानिकारक नहीं है।

Abstract

Biochemical studies on cyanogenetic glycosides in promising variety/strains of PEA (Pisum sativum). *By* C. P. Awashti, Crop Physiology and Biochemistry Section, C. S. Azad University of Agriculture andTechnology, Kanpur.

Twenty five variety/strains of pea included in Coordinated and State varietal trial of C. S. Azad University of Agri. and Tech. Kanpur during the year 1975-76 and 1976-77 were analysed for toxic principles (cyanogenetic glycosides) in order to study the varietal variability for this vital character. The content of cyanogenetic glycosides was found to vary form 0.54 mg to 2.40 mg/100g seed in different varieties/strains under test. It was observed to be much below the lethal limit of causing cyanide poisoning (20 mg per head) on human consumption. Variety/strains 6113, T/01-2,. k-9, PS-60 and T-163 were promising in this parameter. This

indicates that pea variety/strains are relatively superior in the nutritional quality as these contained only nominal amount of this toxic constituent.

हमारे देश के आम शाकाहारी भोजन में दालें गुणकारी प्रोटीन एवं पौष्टिक पदार्थों की बहुलता की दृष्टि से बहुत महत्वपूर्ण हैं।[1] पौष्टिक आहार का सस्ता स्रोत होने के बावजूद भी उत्पादन की कमी और अधिकांशतया पाचन सम्बन्धी शिकायतों के कारण प्रति व्यक्ति इनकी दैनिक उपलब्धता में निरन्तर ह्रास हो रहा है। इस श्रृंखला में दलहनों का पौष्टिक मूल्यांकन करते समय ओसवार्न तथा मेन्डेल[2] ने पाया कि इनकी पाचन क्षमता तथा स्वांगीकरण क्षमता कच्चा सेवन करने के बजाय यदि पकाकर या गर्म करके किया जाय तो यह अपेक्षाकृत बढ़ जाती है। इसी क्रम में लिमा बीन तथा अन्य दालों के जैवरासायनिक विश्लेषण के दौरान एक प्रमुख विषकारी पदार्थ, सायनोजनी ग्लायकोसाइड का पता चला और सर्वेक्षण से ज्ञात हुआ कि भोजन में इस पदार्थ की अधिकता होने से आदमी की मृत्यु तक हो जाती है।[3-5] चना और अरहर के बाद दलहनी फसलों में मटर का प्रमुख स्थान होने के कारण इसकी पौष्टिकता के सम्बन्ध में सायनोजनी ग्लायकोसाइडों की जानकारी भी महत्वपूर्ण हो जाती है।

इस हानिकारक पदार्थ की दलहनी एवं विशेष रूप से मटर की विभिन्न प्रजातियों में उपस्थिति के सम्बन्ध में बहुत कम साहित्य उपलब्ध है अतः प्रस्तुत अध्ययन मटर में पाये जाने वाले इस विषकारी पदार्थ का विश्लेषण द्वारा विस्तृत सूचना प्राप्त करने के उद्देश्य से सम्पन्न किया गया।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये समन्वित एवं राज्यस्तरीय प्रजातीय परीक्षण योजना में सम्मिलित 25 उन्नतशील मटर की प्रजातियों/स्ट्रेनों जिन्हें वर्ष 1975-76 तथा 1976-77 में तिलहन शोध प्रक्षेत्र, चन्द्रशेखर आजाद कृषि एवं प्रौद्योगिक विश्वविद्यालय, कानपुर में उगाया गया था, के बीज में सायनोजनी ग्लायकोसाइडों का जलअपघटन एवं विश्लेषण मानक विधि (ए० ओ० ए० सी0)[6] का अनुगमन करते हुये किया गया। महीन पिसे हुये सूखे 10 ग्राम मटर के आटे को जेल्डाल फ्लास्क में डालकर 200 मिली० आसुत जल मिलाकर इसे 4 घन्टे तक स्वत:पूर्ण अपघटन के लिये इसे सामान्य ताप एवं दाब पर रखा गया। इसके बाद इसे वाष्प-आसवन द्वारा 2·5 प्रतिशत सोडियम हाइड्राक्साइड के 20 मिली० विलयन में लगभग 150 मिली० आसुत एकत्रित किया गया। इस प्रकार प्राप्त आसुत निष्कर्ष का 100 मिली० लेकर इसमें 6 N अमोनियम हाइड्राक्साइड का 8 मिली० तथा 2 मिली० 5% पोटैशियम आयोडाइड मिलाकर माइक्रोब्यूरेट की सहायता से 0·02 N सिल्वर नाइट्रेट विलयन के विरुद्ध इसका अनुमान किया गया। जलअपघटन एवं अनुमापन से प्राप्त हाइड्रोसायनिक अम्ल (HCN) के रूप में सायनोजनी ग्लायकोसाइडों की गणना मटर प्रजातियों में इस प्रकार की गयी :
1·0 मिली० 0·02 N सिल्वर नाइट्रेट $\equiv$1·08 मि० ग्राम हाइड्रोसायनिक अम्ल।

परिणाम तथा विवेचना

विश्लेषण से प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिखाये गये हैं। इससे यह विदित है कि समन्वित प्रजातीय परीक्षण योजना वाली 12 प्रजातियों में हाइड्रोसायनिक अम्ल की मात्रा 0·81 से 2·43 मि० ग्राम/100 ग्राम वर्ष 1975-76 तथा 0·81 से 2·40 मि० ग्राम/100 वर्ष 1976-77 में थी। के-9, पीएस-60 तथा टी-163 प्रजातियों में दोनों वर्षों में इस अम्ल की सबसे कम मात्रा पाई गयी जबकि यह मात्रा पीजी-3 और पी एस 0-49 में सबसे अधिक थी। प्रजातियों का क्रमशः सांकेतिक प्रस्तुतीकरण (वर्ष 1976-77 के अनुसार) इस प्रकार है :

पी एस-49>पी जी-3>पी एस-409>बी आर-12>335-2 बी>पी एस-391>पी जी-2>पी एस-410>1436>टी-163>पी एस-60>के 0-9.

राज्यस्तरीय प्रजातीय परीक्षण योजना में सम्मिलित 14 प्रजातियों में हाइड्रोसायनिक अम्ल के रूप में सायनोजनी ग्लायकोसाइडों की मात्रा 0·81 मि० ग्राम (6113) से 2·43 मि० ग्राम/100 ग्राम (15/एम-4-3) दोनों वर्षों के दौरान इस अध्ययन में पायी गयी। वर्ष 1975-76 तथा 1976-77 के संयुक्त विश्लेषण के आधार पर प्रजातियाँ 6113 तथा टी/01-1 इस गुण में स्वास्थ्य के हिसाब से प्रमुख रहीं। विभिन्न प्रजातियों का (वर्ष 1976-77 के अनुसार) महत्वपूर्ण सांकेतिक प्रस्तुतीकरण इस प्रकार है :

15/एम-4-3>9/01-1>15/एम-3-2->वी/टी-11>एस/4-1>15/के-4>वी/टी-3-4/1>टी-1-6-3>के/टी-1-2>15/टी-10>के/15-3>टी/01-2>के/एम-2>6113.

इस अध्ययन से प्राप्त परिणाम साँख्यिकीय दृष्टिकोण से भी सार्थक रहे तथा दलहनों में हाइड्रोसायनिक अम्ल की मात्रा विभिन्नतायें मान्टगोमेरी[7], कन्ट्रेरस आदि[8] और जाफे[9] द्वारा प्रकाशित परिणामों के अनुरूप मटर के प्रजातियों में भी पाया गया। यद्यपि मटर में जीवनरक्षक नियन्त्रण सीमा के लिये संस्तुति सायनोजनी ग्लायकोसाइडों की मात्रा (20 मि०ग्राम/100 ग्राम) से काफी कम पायी गयी फिर भी वैज्ञानिकों के मतानुसार कुछ सेम/लीमाबीन की प्रजातियों में इसकी अधिक मात्रा की उपस्थिति साथ ही साथ विभिन्न अन्य खर-पतवारों के मिश्रण से उत्पन्न प्रभाव एवं ब्याधियों की सम्भावना से इनकार नहीं किया जा सकता है। इस प्रकार से हुये अपमिश्रण और इससे उत्पन्न प्रभाव विसिया फैबा की प्रजातियों में काफी हद तक साहित्य में वर्णित है[11,10]।

अतः यह स्पष्ट है कि मटर प्रजातियों में हाइड्रोसायनिक अम्ल की विभिन्नतायें महत्वपूर्ण हैं, फिर भी मानव पोषण एवं स्वास्थ्य के मूलभूत सिद्धान्तों के अनुसार इस विषकारी पदार्थ की मात्रा अत्यल्प मात्रा में होने के कारण हानिकार सीमा से परे हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० आर० डी० त्रिपाठी, जीवरसायनज्ञ तथा डा० ओ० एन० मेहरोत्रा, प्राध्यापक एवं अध्यक्ष. फसल कार्यिकी एवं जीव रासायन विभाग, चन्द्रशेखर आजाद कृषि एवं प्रौद्योगिक विश्व-

सारिणी 1

हाइड्रोसायनिक अम्ल (HCN) की मटर की विभिन्न प्रजातियों में संरचना एवं विभिन्नतायें

प्रजातियाँ	समन्वित प्रजातीय परीक्षण 1975-76 ×	समन्वित प्रजातीय परीक्षण 1976-77 ××	राज्य स्तरीय प्रजातीय परीक्षण प्रजातियाँ	राज्य स्तरीय प्रजातीय परीक्षण 1975-76 ×	मात्रा मि० ग्राम/100 ग्राम में 1976-77 ××
35-3-2वी	2·16	1·80	एस/4-1	1·08	1 62
पी जी-3	2·43	2·07	15/के-4	1·08	1 53
पीजी-2	1·62	1·62	बी/टी-11	1·62	1·80
बी आर-12	2·16	1·89	9/01-1	2·16	2·07
पी एस-49	2·16	2·40	15/मम-4-3	2·16	2·43
पी एस-410	1·35	1·53	के 0/15-3	1·35	1·08
1436	1·08	1·35	के/टी-1-2	1·62	1·26
के-9	0·81	0·81	बी/टी-3-4/1	1·62	1·44
पी एस-409	1·62	1·98	टी/01-2	0·54	0·90
टी 163	1·08	1·35	के/एम 0-2	1·08	0·90
पी एस 0/391	1·89	1·79	15/एम-3-2	1·89	1·89
पी एस-60	1·08	1·26	6113	0·81	0·81
			15/टी-10	1·62	1·17
			टी-163	1·08	1·35
मानक त्रुटि	—	0·183	मानक त्रुटि	—	0·161
क्रान्तिक अन्तर 5% माप पार	—	0·38	क्रान्तिक अन्तर क्रान्तिक अन्तर 5% माप पर	—	0·33

(×) संयुक्त मान (××) मध्यमान

विद्यालय, कानपुर का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने प्रस्तुत अध्ययन के लिये आवश्यक सुविधायें उपलब्ध करायीं तथा मार्गदर्शन दिया।

निर्देश

1. पटवर्धन, बी० एन०, **अमेरिकन जर्न० क्लीनिक न्यूट्रीशन**, 1962, **11**, 12.

2. ओसबार्न, टी० वी० तथा मेन्डेल, एल० बी०, **जर्न० बायोल० केमि०**, 1917, **52**, 369-87.

3. ब्रेसानी आर०, इलियास, एल० जी० तथा बेलियन्ते, ए० टी०, **ब्रिटिश जर्न० न्यूट्रीशन**, 1963, **17**, 69-78.

4. चरवानापवन, सी०, **ट्राप० एग्रो० मैग० सीलोन एग्री० सोसा०**, 1943, **99**, 157-59.

5. वीहॉवर, ए०, **थाई० साइन्स बुलेटिन**, 1940, **2**, 1-99.

6. ए० ओ० ए० सी०, Official Methods of Association of Official and Agricultural Chemists, नवाँ संस्करण, वाशिंगटन, डी० सी० 1970.

7. मान्टगोमेरी, आर० डी०, **वेस्ट इन्डियन मिड० जर्न०**, 1964, **13**, 1-11.

8. कन्ट्रेरस, एस०, आर्य, एच०, पाक०, एन० तथा टेग्ले, एम० ए०, **आर्किव्स लेटिनो अमेरिकोनोस डि न्यूट्रीटिवों**, 0, 1973, **23**·(27), 151-259.

9. जाफे, डब्लू० जी० तथा हनीग, के०, **एक्टि० बायाकेम बायोफिजिक्स**, 1965, **109**, 80-91.

10. ककाडे, एम० एल० तथा इवान्स, आर० जे०, **ब्रिटिश जर्न० न्यूट्रीशन**, 1965, **19**, 269-76.

11. लाइनर, आई० ई०, **अमेरिकन जर्न० क्लीनिकल न्यूट्रीशन**, 1962, **11**, 281-88·

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

k-चरों में यूलेरी बहुपद

बी० के० राय, एस० एन० सिंह तथा वी० पी० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—अप्रैल 25, 1984]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में k चरों में यूलेरी बहुपद पर विचार किया गया।

Abstract

On Eulerian polynomials in k variables. *By* B. K. Rai, S. N. Singh and V. P. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

The paper deals with Eulerian polynomials in k variables.

1. जैसा कि सर्वविदित है यूलेरी बहुपदों $\Phi_n(x; a)$ को निम्नलिखित श्रेणी विकासों[1] के रूप में परिभाषित किया जा सकता है

$$\frac{(1-a)\exp xt}{(1-a\exp t)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x; a)\frac{t^n}{n!} \tag{1.1}$$

राय[2] ने यूलेरी बहुपदों को x, y इन दो चरों में निम्नलिखित ढंग से परिभाषित किया है

$$\frac{(1-a)(1-b)\exp(xt+yt^2)}{(1-a\exp t)(1-b\exp t^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x, y; a, b)\frac{t^n}{n!} \tag{1.2}$$

इन परिभाषाओं के आधार पर हम यूलेरी बहुपद $\Phi_n(x_1, ..., x_k; b_1, ..., b_k)$ को k चरों $x_1, ..., x_k$ में निम्नलिखित के द्वारा परिभाषित करते हैं

$$\frac{\prod_{r=1}^{k}(1-b_r)\exp\sum_{r=1}^{k}x_r t^r}{\prod_{r=1}^{k}(1-b_r\exp t^r)}\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x_1,\ldots,x_k;b_1,\ldots,b_k)\frac{t^n}{n!} \tag{1.3}$$

जहाँ $(b_1, \ldots, b_k) \neq 1$ और हम उपर्युक्त बहुपदों के लिये रोचक परिणाम प्राप्त करने के लिये जनक फलन प्रविधि का प्रयोग करते हैं।

2. सर्वप्रथम हम सामान्य यूलरी बहुपदों के पदों में $\Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k)$ के लिये व्यंजक प्रदान करेंगे।

(1.1) तथा (1.3) से प्रारम्भ करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{\prod_{r=1}^{k-1}(1-b_r)\exp\sum_{r=1}^{k-1}x_r t^r}{\prod_{r=1}^{k-1}(1-b_r\exp t^r)}=\sum_{q=0}^{\infty}\Phi_q(x_1,\ldots,x_{k-1};b_1,\ldots,b_{k-1})\frac{tq}{q!} \tag{2.1}$$

$$\frac{(1-b_k)\exp x_k t^k}{(1-b_k\exp t^k)}=\sum_{p=0}^{\infty}\Phi_p(x_k;b_k)\frac{tp^k}{p!} \tag{2.2}$$

(2.1) तथा (2.2) का गुणा करने तथा प्राप्त फल की तुलना (1.3) करने पर देखते हैं कि

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n(x_1,\ldots,x_k;b_1,\ldots,b_k)\frac{tn}{n!}\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Phi_q(x_1,\ldots,x_{k-1};b_1,\ldots,b_{k-1})}{q!}\cdot\frac{\Phi_p(x_k;b_k)}{p!}t^{q+pk} \tag{2.3}$$

$q+pk$ स्थान पर n रखने पर (1.3) का स्वरूप

$$\frac{\Phi_n(x_1,\ldots,x_k;b_1,\ldots,b_k)}{n!}=\sum_{p=0}^{[n/k]}\frac{\Phi_{n-pk}(x_1,\ldots,x_{k-1};b_1,\ldots,b_{k-1})}{(n-pk)!}\cdot\frac{\Phi_p(x_k;b_k)}{p!} \tag{2.4}$$

हो जाता है जहाँ $[n/k]$ से n/k में निहित सबसे बड़ा पूर्णांक प्राप्त होता है।

उपर्युक्त विधि को दुहराने से हमें निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है

$$\frac{\Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k)}{n!} = \sum_{p_2=0}^{[n-\lambda_2/2]} \cdots \sum_{p_{k-1}=0}^{[n-\lambda_{k-1}/k-1]} \sum_{p_k=0}^{[n/k]} \frac{\Phi_{n-\lambda_1}(x_1; b_1)}{(n-\lambda_1)!}$$

$$\cdot \frac{\Phi p_2(x_2; b_2)}{p_2!} \cdots \frac{\Phi p_k(x_k; b_k)}{p_k!} \tag{2.5}$$

जहाँ

$$\lambda_i = \sum_{r=i+1}^{k} r p_r.$$

3. (1.3) के दोनों पक्षों को x_r के प्रति अवकलित करने पर

$$\frac{t_r \prod_{r=1}^{k}(1-b_r) \exp \sum_{r=1}^{k} x_r t^r}{\prod_{r=1}^{k}(1-b_r \exp t^r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_r} \Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k) \frac{t^n}{n!},$$

अर्थात्

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Phi_p(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k) \frac{t^{p+r}}{p!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_r} \Phi_n(x_1, \ldots, x_k;$$

$$b_1, \ldots, b_k) \frac{t^n}{n!} \tag{3.1}$$

(3.1) के दोनों पक्षों से t^n के गुणांकों को समीकरित करने पर

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial \Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k)}{\partial x_r} = \frac{1}{(n-r)!} \Phi_{n-r}(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k),$$

$$(n \geqslant r) \tag{3.2}$$

इसी प्रकार हम निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{n!} \frac{\partial^2 \Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k)}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{1}{(n-r-s)!} \Phi_{n-r-s}(x_1, \ldots, y_k; b_1, \ldots, b_k),$$

$$(n \geqslant r+s) \tag{3.3}$$

(3.2) तथा (3.3) से निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial^2 \Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, b_k)}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial \Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1, \ldots, _k)}{\partial x_{r+1}},$$

$$(k, n \geqslant r+s) \tag{3.4}$$

विशेष रूप से $n=k(k+1)/2$ के लिये इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{1}{(k\,(k+1)/2)!}\;\frac{\partial k\;\Phi_{k(k+1)/2}\,(x_1,\,\ldots,\,x_k;\,b_1,\,\ldots,\,b_k)}{\partial x_1,\,\ldots,\,\partial x_k}=\Phi_0\,(x_1,\,\ldots,\,x_k;\,b_1,\,\ldots,\,b_k).$$

अत: सारे फलन $\Phi_n\,(x_1,\,\ldots,\,x_k;\,b_1,\,\ldots,\,b_k)$ (3.3) के कारण उष्मा विसरण समीकरण के हल हैं।

4. (1.3) में x_i (i विषम संख्या है) के स्थान पर $1-x_i$ रखने पर

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n\,(1-x_1,\,x_2,\,1-x_3,\,x_4,\,\ldots;\,b_1,\,\ldots,\,b_k)\,\frac{t^n}{n!}$$

$$=\frac{\prod\limits_{r=1}^{k}(1-b_r)\exp\Big(\sum\limits_{r=1}^{[k+1/2]}(1-x_{2r-1})\,t^{2r-1}+\sum\limits_{r=1}^{[k/2]}x_{2r}\,t^{2r}\Big)}{\prod\limits_{r=1}^{[k+1/2]}(1-b_{2r-1}\exp t^{2r-1})\prod\limits_{r=1}^{[k/2]}(1-b_{2r}\exp t^{2r})}$$

$$\frac{\prod\limits_{r=1}^{[k+1/2]}\left(1-\dfrac{1}{b_{2r+1}}\right)\prod\limits_{r=1}^{[k/2]}(1-b_{2r})\exp\sum\limits_{r=1}^{k}x_r\,(-t)^r}{\prod\limits_{r=1}^{[k-1/2]}\left(1-\dfrac{1}{b_{2r-1}}\exp(-t)^{2r-1}\right)\prod\limits_{r=1}^{[k/2]}(1-b_{2r}\exp(-t)^{2r})}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_n\,(x_1,\,\ldots,\,x_k;\,\frac{1}{b_1},\,b_2,\,\frac{1}{b_3},\,b_4,\,\ldots)\,\frac{(-t)^n}{n!}\,.$$

पिछली समिका में t^n के गुणकों को समीकरित करने पर

$$\Phi_n\,(1-x_1,\,x_2,\,1-x_3,\,x_4,\,\ldots;\,b_1,\,\ldots,\,b_k)$$
$$=(-1)^n\,\Phi_n\,(x_1\,\ldots,\,x_k;\,\frac{1}{b_1},\,b_2,\,\frac{1}{b_3},\,b_4,\,\ldots) \qquad (4.1)$$

(4.1) से तुरन्त ही निम्नलिखित की प्राप्ति होती है

$$\Phi_n\,(1-x_1\;1-x_2,\,\ldots;\,1-x_k;\,b_1,\,\ldots,\,b_k)$$
$$=(-1)^n\,\Phi_n\,(x_1,\,1-x_2,\,x_3\,,\,1-x_4,\,\ldots;\,\frac{1}{b_1},\,b_2,\,\frac{1}{b_3},\,b_4,\,\ldots) \qquad (4.2)$$

5. हम (2.5) से प्रारम्भ करेंगे। इसमें हम x_i ($i=1, \ldots, k$) के स्थान पर $m^i x_i$ रखेंगे जहाँ m एक धनात्मक संख्या है। तब

$$\frac{\Phi_n(mx_1, \ldots, m^k x_k; b_1, \ldots, b_k)}{n!} = \sum_{p_2=0}^{[n-\lambda_2/2]} \cdots \sum_{p_{k-1}=0}^{[n-\lambda_{k-1}/k-1]}$$

$$\cdot \sum_{p_k=0}^{[n/k]} \frac{\Phi_{n-\lambda_1}(mx_1; b_1)}{(n-\lambda_1)!} \frac{\Phi_{p_2}(m^2 x_2; b_2)}{p_2!} \cdots \frac{\Phi_{p_k}(m^k x_k; b_k)}{p_k!} .$$

बहुपदी समुच्चय $\Phi_n(x_1, \ldots, x_k; b_1 \ldots, b_k)$, के लिये हमें निम्नलिखित गुणन प्रमेय प्राप्त हैं।

प्रमेय 1.

$$\Phi_n(mx_1, \ldots, m^k x_k; b_1, \ldots, b_k) = \prod_{r=1}^{k} \left(\frac{1-b_r}{1-b_r^{m^r}}\right) m^n$$

$$\cdot \sum_{s_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{s_k=0}^{m^k-1} b_1^{s_1} \ldots b_k^{s_k} \; \Phi_n\left(x_1+\frac{s_1}{m}, \ldots, x_k+\frac{s_k}{m^k}; b_1^m, \ldots, b_k^{m^k}\right) \tag{5.1}$$

जहाँ m^i ($i=1, \ldots, k$) धनात्मक संख्यायें हैं।

उपपत्ति

(1.3) को निम्नलिखित रूप में रखा जा सकता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(mx_1, \ldots, m^k x_k; b_1, \ldots, b_k) \frac{t^n}{n!} = \frac{\prod_{r=1}^{k} (1-b_r) \exp \sum_{r=1}^{k} m^r x_r t^r}{\sum_{r=1}^{k} (1-b_r \exp t^r)}$$

$$= \frac{\prod_{r=1}^{k} (1-b_r) \exp \sum_{r=1}^{k} m^r x_r t^r}{\prod_{r=1}^{k} (1-b_r^{m^r} \exp m^r t^r)} \cdot \prod_{r=1}^{r} \left(\sum_{s_r=0}^{m^r-1} b_r^{s_r} \exp s_r t^r\right)$$

$$= \prod_{r=1}^{k} \left(\frac{1-b_r}{1-b_r^{m^r}}\right) \prod_{r=1}^{k} (1-b_r^{m^r}) \sum_{s_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{s_k=0}^{m^k-1} b_1^{s_1} \ldots b_k^{s_k}$$

$$\frac{\exp \sum_{r=1}^{k}\left(x_r+\frac{s_r}{m^r}\right)}{\prod_{r=1}^{k}(1-b_r^{m^r}\exp m^r t^r)}$$

$$=\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{1-b_r}{1-b_r^{m^r}}\right)\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_k=0}^{m^k-1} b_1^{s_1}\cdots b_k^{s_k}$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(mt)^n}{n!}\,\Phi_n\left(x_1+\frac{s_1}{m},\ \ldots,\ x_k+\frac{s_k}{m^k}\ ;\ b_1^m,\ \ldots,\ b_k^{m^k}\right).$$

t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें प्रमेय प्राप्त होता है।

प्रमेय 2.

$$m^n\prod_{r=1}^{k}(1-b_r^{l^r})\sum_{s_1=0}^{m-k}\cdots\sum_{s_k=0}^{m^k-1} b_1^{s_1 l}\cdots b_k^{s_k l^k}$$

$$\cdot\,\Phi_n\left(\frac{x_1}{m}+\frac{s_1 l}{m},\ldots,\frac{x_k}{m^k}+\frac{s_k l^k}{m^k};b_1^m,\ldots,b_k^{m^k}\right)$$

$$=l^n\prod_{r=1}^{k}(1-b_r^{m^r})\sum_{q_0=0}^{l-1}\cdots\sum_{q_k=0}^{l^k-1} b_1^{q_1 m}\cdots b_k^{q_k m^k}$$

$$\cdot\,\Phi_n\left(\frac{x_1}{l}+\frac{q_1 m}{l},\ldots,\frac{x_k}{l^k}+\frac{q_k m^k}{l^k};\ b_1^l,\ldots,b_k^{l^k}\right) \qquad (5.2)$$

जहाँ m तथा l दोनों धनात्मक संख्यायें हैं।

उपपत्ति

हम निम्नलिखित से शुरू करेंगे

$$\sum_{s_1=0}^{m-1}\cdots\sum_{s_k=0}^{m^k-1} b_1^{s_1 l}\cdots b_k^{s_k i^k}$$

$$\cdot\frac{\prod_{r=1}^{k}(1-b_r^{m^r})\exp\sum_{r=1}^{k}\left(\frac{x_r}{m^r}+\frac{s_r l^r}{m^r}\right)m^r t^r}{\prod_{r=1}^{k}(1-b_r^{m^r}\exp m^r t^r)}$$

$$= \frac{\prod_{r=1}^{k} (1-b_r^{m^r}) \exp \sum_{r=1}^{k} x_r t^r \prod_{r=1}^{k} (1-b_r^{m^r l^r} \exp m^r l^r t^r)}{\prod_{r=1}^{k} (1-b_r^{m^r} \exp m^r t^r) \prod_{r=1}^{k} (1-b_r^{l^r} \exp l^r t^r)} \tag{5.3}$$

(5.3) से तथा m^r एवं l^r दोनों में संमिति का उपयोग करने पर हमें ऐसा प्रमेय प्राप्त होता है जो प्रमेय 1 का सार्वीकरण है।

निर्देश

1. कार्लिट्ज, एल०, Math. Magazine, 1959, **30**, 247-260.
2. राय, पी० एन० तथा सिंह, एन० एम०, Bull. Cal. Math. Soc., 1981, **72**, 101-105.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

घूर्णी तरल में स्टोक्स-एकमान तथा रैले स्तर

एच० के० कटियार तथा नवल किशोर

गणित विभाग, बनारस हिन्दू युनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—नवम्बर 9, 1984]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में अचर गुणधर्म वाले एकसमानतः घूर्णी असंपीड्य, समांगी, श्यान तथा दो समान्तर क्षैतिज डिस्कों से परिबद्ध तरल के परिवर्ती परिसीमा स्तर प्रवाह पर विचार किया गया है जो या तो दोनों डिस्कों के दोलन के कारण अथवा परिसीमा स्तरों के बाहर के मुख्य प्रवाह के कारण है। वेग क्षेत्र तथा डिस्क पर संगत स्टोक्स-एकमान-रैले स्तरों की संरचना का अनुनादी तथा आनुनादी दशाओं के लिए निर्धारण किया गया है।

Abstract

On Stokes Ekman and Rayleigh layers in a rotating fluid. *By* H. K. Katiyar and Newal Kishore, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

This paper considers an unsteady boundary layer flow of an uniformly rotating incompressible, homogeneous, viscous fluid with constant properties bounded by two parallel horizontal disks due to oscillation of the disks or oscillation of the main flow outside the boundary layers. The velocity field and the structure of associated Stokes, Ekman and Rayleigh layers on the disks are determined for resonant and non-resonant cases.

भूभौतिकी परिघटनाओं में अनुप्रयोग के कारण घूर्णी तरलों का अध्ययन रोचक तथा महत्वपूर्ण हो गया है।

थानली[1] एवं देवनाथ तथा हाल[2] अनन्त दृढ़ डिस्क अथवा दो समानन्तर क्षैतिज दृढ़ डिस्कों से परिबद्ध असंपीड्य श्यान घूर्णी तरल में डिस्कों के लघु आयाम वाले दोलन द्वारा अनुप्रेरित परिवर्ती द्रवगतिक प्रवाह के बारे में शोध किया। वेग क्षेत्र के लिए शुद्ध हल तथा डिस्कों पर अनुनादी तथा आनुनादी

दशाओं के लिए संगत स्टोक्स, एकमान रैले स्तरों की संरचना को निर्धारित किया। इन दोनों शोधकर्ताओं ने प्रवाह परिघटनाओं पर दाब प्रवणता के प्रभाव की पूर्णतया उपेक्षा की है। इसी लिये पूर्ववर्ती कार्यों को और भी अधिक व्यापक बनाने के लिए प्रस्तुत शोधपत्र में दाब प्रवणता के प्रभाव को भी शामिल कर लिया गया है तथा परिसीमा स्तरों के दीर्घवृत्तीय दोलनों द्वारा एकसमानतः घूर्णी तरल तंत्र में अनुप्रेरित परिवर्ती द्रवगतिकी परिसीमा स्तर प्रवाह को शामिल किया गया है। वेग वितरण का ठीक द्रव तथा डिस्क पर स्टोक्स-एकमान रैले की संरचना का निर्धारण किया गया है। प्रस्तुत विश्लेषण से कई रोचक परिसीमन दशाएँ प्राप्त की गयी हैं।

1. समस्या का गणितीय सूत्रण

हम अचर घनत्व s तथा शुद्ध गतिक श्यानता v वाले असम्पीड्य, समांगी एवं श्यान तरल पर विचार करेंगे जो दो अनन्त दृढ़ डिस्कों से $z=o$ तथा $z=D$ पर परिबद्ध है। तरल तथा डिस्क दोनों z-अक्ष के परित : एकसमान कोणीय वेग $\bar{\Omega}$ से ठोस पिण्ड घूर्णन को अवस्था में हैं तथा वेग डिस्क के अभिलम्ब है।

घूर्णी कर्तिकीय निदेशांक तंत्र में तरल को परिवर्ती गति को नैवियर-स्टोक समीकरण तथा सांतत्य समीकरण द्वारा दिया जाता है।

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}+2\bar{\Omega}\times\mathbf{u}=-1/\rho\nabla p+v\nabla^2\mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$div\ \mathbf{u}=o \tag{1.2}$$

जबकि $\mathbf{u}=(u, v, w)$ वेग क्षेत्र है, $\Omega=\bar{\Omega}k$ z-अक्ष के समान्तर कोणीय वेग सदिश है तथा p अपकेन्द्री पद से युक्त दाब है।

साधारण स्टोक्स परिसीमा स्तर की संरचना से हम मानकर चलते हैं कि परिसीमा स्तर के बाहर के मुख्य प्रवाह के दोलन के कारण स्थापित प्रवाह क्षेत्र केवल z तथा t पर आधारित होता है। परिणामस्वरूप (1.1) से अरैखिक पद स्वतः कम हो जाता है तथा $U(z, t)$ निम्नलिखित रैखिक समीकरण द्वारा संनियमित होता है

$$\frac{\partial q}{\partial t}+2\Omega iq=-v\frac{\partial^3 q}{\partial z^2}-P \tag{1.3}$$

जबकि

$$q=u+iv \text{ और } \mathbf{P}=\left(\frac{\partial p}{\partial x}+i\frac{\partial p}{\partial y}\right)$$

यह एक ययातथ्य परिवर्ती परिसीमा स्तर समीकरण है तथा निम्नांकित परिसीमा प्रतिबन्धों के अन्तर्गत इसे हल करना है।

$$q=Uf(t)=U(ae^{-iw_1t}+be^{-iw_1t})\ z=o,\ t>o \text{ पर} \tag{1.4}$$

$$q=Ug(t)=U(ce^{iw_2t}+de^{-iw_2t})\ z=D,\ t>o \text{ पर} \tag{1.5}$$

जबकि U अचर वेग है, a, b, c, d सम्मिश्र अचर हैं, w_1 एवं w_2 आरोपित दोलन की **आवृत्तियाँ** हैं।

अश्यान क्षेत्र प्रवाह के मूलभूत गति समीकरण के साथ सुसंगत होने के लिए यह आवश्यक है कि

$$\frac{\partial q}{\partial t}+2\Omega iq=-P \tag{1.6}$$

जबकि q (1.5) द्वारा दिया जाता है तथा दाब प्रवणता P समय t का ज्ञात फलन है।

समस्या का आरम्भिक प्रतिबन्ध निम्नलिखित है

$$q=o\ t\leqslant o \text{ सभी } z>o \text{ के लिए} \tag{1.7}$$

2. समस्या का हल

निम्नलिखित अविम चरों का स्थापन सुविधाजनक रहेगा

$$(x', y', z')=\frac{1}{D}(x, y, z), \quad t'=\Omega t, \quad u', v'=\frac{1}{U}(u, v)$$

$$P'=\frac{P}{DU\Omega}, \qquad D=\left(\frac{\nu}{\Omega}\right)^{1/2}$$

अविम राशियों के पदों में (1.3) से (1.7) (डैश को छोड़ देने पर) निम्नलिखितरूप में आ जाते हैं

$$\frac{\partial q}{\partial t}+2ig=-P+\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \tag{2.1}$$

$$q=f(t)=ae^{i\sigma_1 t}+de^{-i\sigma_1 t}\quad z=o,\ t>o \text{ पर} \tag{2.2}$$

$$q=g(t)=ce^{i\sigma_2 t}+de^{-i\sigma_2 t}\ z=D,\ t>o \text{ पर} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t}+2\,iq=-P \tag{2.4}$$

$$q=o\ t\leqslant o,\ z>0 \text{ पर} \tag{2.5}$$

लाप्लास रूपान्तर $\mathbf{q}(z, s)$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है

$$\mathbf{q}(z, s)=\int_o^{\infty} e^{-st}\, z(q, t)\, dt \tag{2.6}$$

यह रूपान्तर समस्या के हल में सहायता देता है तथा हल को लाप्लास समाकल के रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिख सकते हैं

$$q(z, t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta-iw}^{\delta+iw} e^{st}\left[\, g(s)\,\frac{\sinh \lambda z}{\sinh \lambda D}+f(s)\,\frac{\sinh \lambda(D-z)}{\sinh \lambda\, D}\right]ds. \tag{2.7}$$

जबकि

$$\lambda=(s+2i)^{1/2}$$

दाब का चरम पैटर्न तथा इसका अनंतस्पर्शी उपगमन का निर्धारण सम्मिश्र समाकल (2.7) की विचित्रताओं द्वारा किया जाता है। पुनश्च: (2.7) के मान को निकालने के लिए इन विचित्रताओं की प्रकृति तथा उनकी स्थिति के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है।

यह पता लगाया जा सकता है कि समाकल्य में चार साधारण अनन्तक (पोल) $s=\pm w_r$, $(r=1, 2)$ पर तथा विविक्त अनंतकों का

$$s=-2i-\frac{n^2\pi^2}{D^2}\ (n=1, 2, 3, \ldots)\text{ पर हैं।}$$

विश्लेषिक फलनों के अवशेष सिद्धान्त का उपयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned}
q(z, t)={}&ae^{i\sigma_1 t}\,\frac{\sinh \lambda_1}{\sinh \lambda_1\ D}+be^{-i\sigma_1 t}\,\frac{\sinh \lambda'_1\,(D-z)}{\sinh \lambda'_1\ D}\\
&+ce^{i\sigma_2 t}\,\frac{\sinh \lambda_2\,(D-z)}{\sinh\ \lambda_2\ D}+de^{-i\sigma_2 t}\,\frac{\sinh \lambda'_2\ z}{\sinh \lambda'_2 D}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ 2\pi n a \sin\{n\pi(1-z/D)\}}{n^2\pi^2+(2+\sigma_1)\ iD^2}\ e^{-\alpha t}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi n b\ \sin\ \{n\pi\,(1-z/D)\}}{n^2\pi^2+(2-\sigma_1)\ iD^2}e^{-\alpha t}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi n c\ \sin\{n\pi z/D\}}{n^2\pi^2+(2+\sigma_2)iD^2}\ e^{-\alpha t}\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi n d\ \sin\ \{n\pi z/D\}}{n^2\pi^2+(2-\sigma_2)iD^2}\ e^{-\alpha t}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

जबकि

$$\alpha=\left(2t+\frac{n^2\pi^2}{D^2}\right)$$

(2.8) के प्रथम चार पद चरम स्थायी अवस्था हल निरूपित करते हैं और जब तक प्लेट अनुनादी आवृत्ति से दोलन न करते हों हल में विमीय मात्रक में, सम्मिलित स्टोक्स-एकमान स्तरों की मोटाई निम्नलिखित कोटि की होती है

$$\left(\frac{\nu}{|2\Omega \pm w_1|}\right)^{1/2} z=o \text{ पर, } \left(\frac{\nu}{|2\Omega \pm w_1|}\right) z=D \text{ पर} \tag{2.9}$$

दशा I दोलायमान स्थिति $(\sigma_1=2\neq\sigma_2)$

हम तरल की संरचना का अध्ययन उस दशा में करेंगे जब कि एक या दोनों डिस्क अनुनादी आवृत्ति से दोलन करते हैं। पहली दशा में, बिना व्यापकता की हानि में हम यह मान सकते हैं कि $\sigma_1=2$ तथा $\sigma_2\neq 2$. उस दशा में हल को (2.8) से सीधे प्राप्त किया जा सकता है जो निम्नलिखित रूप में हैं

$$\begin{aligned} q(z, t) &= ae^{2it}\frac{\sinh \lambda_0(D-z)}{\sinh \lambda_0 D}+be^{-2it}\left(1-\frac{z}{D}\right) \\ &+ce^{i\sigma_2 t}\frac{\sinh \lambda_2 z}{\sinh \lambda_2 D}+de^{-i\sigma_2 t}\frac{\sinh \lambda'_2 z}{\sinh \lambda'_2 D} \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi na \sin\{n\pi(1-z/D)\}}{n^2\pi^2+4iD^2}e^{-\alpha t} \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n b}{n\pi}\sin\{n\pi(1-z/D)\}e^{-\alpha t} \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi nc \sin\{n\pi z/D\}}{n^2\pi^2+(2+\sigma_2)iD^2}e^{-\alpha t} \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi nd \sin\{n\pi z/D\}}{n^2\pi^2+(2-\sigma_2)iD^2}e^{-\alpha t} \end{aligned} \tag{2.10}$$

सीमा $t\to\infty$ में (2.10) निम्नलिखित हो जाता है

$$\begin{aligned} q(z, t) &= ae^{2it}\frac{\sinh \lambda_0(D-z)}{\sinh \lambda_0 D}+be^{-2it}\left(1-\frac{z}{D}\right) \\ &+ce^{i\sigma_2 t}\frac{\sinh\lambda_2 z}{\sinh\lambda_2 D}+de^{-i\sigma_2 t}\frac{\sinh\lambda'_2 z}{\sinh\lambda'_2 D} \end{aligned} \tag{2.11}$$

(2.11) में तीसरे पद को छोड़ कर सभी पद डिस्कों पर सम्मिलित स्टोक्स-एकमान स्तर व्यक्त करते हैं और तीसरा पद दोलायमान तलीय कुएट प्रवाह को व्यक्त करता है। जब $(\sigma_1=\sigma_2=2)$ तो अन्तिम स्थायी अवस्था उसी प्रकार निम्नलिखित रूप में प्राप्त की जा सकती है

$$q(z, t)=(a+c)e^{2it}\frac{\sinh \lambda_0(D-z)}{\sin \lambda_0 D}+e^{-2it}\left[b\left(1-\frac{z}{D}\right)+\frac{dz}{D}\right] \tag{2.12}$$

जब $(a+c)\neq 0$ तथा $b\neq 0$ तब यह हल दोलायमान तलीय कुएट प्रवाह के साथ साथ एकमान परिसीमा स्तर को भी निरूपित करता है। जब $(a+c)=0$, $b\neq d$, (2.12) केवल दोलायमान तलीय कुएट प्रवाह ही व्यक्त करता है।

अन्त में ऊपर वर्णित सारे परिणाम विशिष्ट दशाओं में थार्नली[1] के परिणाम में अपचयित हो जाते हैं।

दशा II दोलनहीन स्थिति $(\sigma_1=\sigma_2=0)$

इस दशा में हल को (2.8) से तुरन्त निम्नलिखित रूप में प्राप्त किया जा सकता है

$$q(z,t)=(a+b)\frac{\sinh \lambda^*(D-z)}{\sinh \lambda^* D}+(c+d)\frac{\sinh \lambda^* z}{\sinh \lambda^* D}$$

$$+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi n \sin\{n\pi(1-z/D)\}}{n^2\pi^2+2iD^2}e^{-\alpha t}$$

$$+(c+d)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\pi n \sin\{n\pi z/D\}}{n^2\pi^2+2iD^2}e^{-\alpha t} \tag{2.13}$$

सीमा $t\to\infty$ लेने पर क्षणिक प्रभाव श्यान विसरण काल में समाप्त हो जाते हैं तथा हल अन्तिम स्थायी अवस्था में आ जाता है

$$q(z, t)=(a+b)\ \frac{\sinh \lambda^*(D-z)}{\sinh \lambda^* D}+(c+d)\ \frac{\sinh \lambda^* z}{\sinh \lambda^* D} \tag{2.14}$$

यह हल डिस्कों पर एकमान परिसीमा स्तरों को निरूपित करता है जिसमें वेधन की मोटाई की कोटि $\sqrt{(\nu/\Omega)}$ होने के साथ साथ डिस्क पर विसरण शील रैले स्तर की मोटाई $\sqrt{(\nu t)}$ है।

निर्देश

1. थार्नली, सी०, Jour. Mech. and Appl. Math., 1968, **21**, 451-461.

2. देबनाथ एल० तथा हाल, एम०, Bulletin del, Academics Polonase des Science xxi, 1973, 3, 141-401.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

थैलेट आयनों की उपस्थिति में निर्मित नीले परक्रोमेटों के उत्पादों द्वारा चर्म-शोधन

एस० ए० खान, संजय तिवारी तथा बी०एम० एल० तिवारी
रसायन विभाग, शासकीय विज्ञान महाविद्यालय, रीवां (म० प्र०)

[प्राप्त—9 अगस्त, 1984]

सारांश

थैलेट आयनों की उपस्थिति में निर्मित नीले परक्रोमेटों के जलअपघटन उत्पादों तथा इनसे वियोजित डाइ-थैलेटों-आक्टा-ऐक्वा-डाइ क्रोमियम (III) क्लोराइड तथा डाइ हाइड्रॉक्सो-μ-डाइ-थैलेटो-हेक्सा-ऐक्वा-डाइ क्रोमियम (III) संकुल का सफल उपयोग चर्म-शोधन हेतु किया गया है।

Abstract

Tanning of leather by the products of blue perchromates prepared in presence of phthalate ions. *By* S. A. Khan, Sanjay Tiwari and B. M. L. Tiwari, Department of Chemistry, Government. Science College, Rewa (M. P.).

The water decompostion products of the blue perchromates prepared in presence of phthalate ions and the complexes, diphthalato-octa-aquo-di-chromium (III) chloride and dihydroxo-μ-di-phthalato-hexa aquo-dichromium (III) derived from water decomposition products have successfully been used for the tanning of leather.

कई क्रोमियम(III) थैलेट संकुलों का अध्ययन उनके विशिष्ट चर्म-शोधन क्षमता के कारण किया गया है।[1–5] थैलेट आयनों की उपस्थिति में निर्मित नीले परक्रोमेटों के जलअपघटन उत्पादों से डाइथैलेट-आक्टा-ऐक्वा-डाइ क्रोमियम (III) क्लोराइड तथा डाइ-हाइड्रॉक्सो-μ-डाइ-थैलेटो-हेक्सा ऐक्वा-डाइ क्रोमियम (III) संकुलों का वियोजन संभव है।[6–7] इस कारण से इस अध्ययन में उपर्युक्त जल-अपघटन उत्पादों एवं उनसे प्राप्त संकुलों का प्रयोग चर्म-शोधन में किया गया है।

प्रयोगात्मक

सभी प्रयुक्त रसायन वैश्लेषिक कोटि के थे। पी-एच मापन तोश्नीवाल पी-एच मीटर (सी० एल०-49) द्वारा किया गया।

नीला परक्रोमेट :

थैलेट आयनों की उपस्थिति में इन्हें निम्नलिखित विधि से बनाया गया :

(I) $NK_2Cr_2O_7$ (50 मिली०), 0·05N थैलिक अम्ल (400 मिली०) एवं 6%H_2O_2 (10 मिली०) के मिश्रित विलयन (पी एच=2·45) द्वारा।[8-9]

(II) थैलिक अम्ल के स्थान पर 0·2N पोटैशियम हाइड्रोजन थैलेट विलयन (100 मिली०) का प्रयोग कर (I) की तरह नीला परक्रोमेट बनाया गया।

जल अपघटन उत्पाद :

(A) आसुत जल (100 मिली०) के सम्पर्क में (I) नीले परक्रोमेट को 25°C पर अपघटित किया गया। रंगहीन ईथर सतह को अलग करने के बादे प्राप्त भूरे-पीले विलयन (pH=3·55) को 40°C पर लगभग एक घण्टे तक रखा गया।

(B) (II) नीले परक्रोमेट से (A) की तरह जल-अपघटन उत्पाद (B) को (pH=3·65) प्राप्त किया गया।

संकुल

(A) एवं (B) जल-अपघटन उत्पादों का ऐम्बरलाइट 400 (Cl^-) रेजिन स्तम्भों (6/100 मिमी०) की सहायता (10-12 बूंद/मिनट) से विनिमय कर डाइ-थैलेटो-आक्टाऐक्वा-डाइ क्रोमियम (III) क्लोराइड संकुल (C-D) प्राप्त किये गये।[7]

(A) एवं (B) जल-अपघटन उत्पादों को पश्चवाही परिस्थितियों में उबालने से डाइ-हाइड्रॉक्सो- -μ-डाइ थैलेटो-हेक्सा ऐक्वा-डाइ क्रोमियम (III) संकुल (E-F) प्राप्त किये गये।[6]

चर्म शोधन

(A) एवं (B) जल-अपघटन उत्पादों का उपयोग उनके मूल अवस्था में ही किया गया जबकि (C-F) संकुलों के 1% हल्के क्षारीय (NaOH) विलयन प्रयोग में लाये गये।

गाय के कच्चे चमड़े को पहले अम्लमार्जित चमड़े में परिवर्तित किया गया।[10] अम्लमार्जित चमड़े के टुकड़ों को अलग-अलग फ्लास्कों में लिये गये लिकर (A-F से प्राप्त) में डुबाकर, अच्छी तरह कार्क से फ्लास्कों का मुंह बन्द कर, लगभग चार घण्टे तक यांत्रिक-फ्लास्क-हल्लित्र द्वारा फ्लास्कों को हिलाया गया। इसके बाद पूर्ण अवशोषण हेतु उपर्युक्त फ्लास्कों को लगभग 12 घण्टों के लिये रख दिया गया। चमड़े में Cr_2O_3 के स्थिरीकरण हेतु फ्लास्कों में उपस्थित विलयनों को $NaHCO_3$ द्वारा क्षारीय किया गया। इसके पश्चात् फ्लास्कों का मुंह पुनः बन्द कर उपर्युक्त विधि से लगभग एक घण्टे

तक हिलाया गया। अब चमड़े के टुकड़ों को बाहर निकाल कर, जल से अच्छी तरह धोकर, सुखाकर चर्मशोधन क्रिया का परीक्षण किया गया।

A एवं B : इनसे शोधित चमड़ा हल्के नीले रंग का था तथा उसकी सतह पर उभरे हुये दाने दिखाई पड़ते थे। यह शोधित चमड़ा मुलायम एवं शोथ-विहीन था। इस चमड़े का संकुचन तापमान (Ts) 85-86 °C पाया गया।

C एवं D : इनसे शोधित चमड़ा (A) एवं (B) से शोधित चमड़े के प्रकार का था किन्तु (Ts) 85-87 °C पाया गया।

E एवं F :इनसे शोधित चमड़ा तेज नीले रंग का था जिसके सतह पर छोटे-छोटे दाने दिखाई पड़ते थे। अन्य अवलोकन (A-D) की तरह ही थे जबकि (Ts) 87-89 °C पाया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण इस कार्य हेतु सुविधा प्रदान करने के लिये ऋषि चमड़ा उद्योग, रीवाँ (म० प्र०) एवं वहाँ कार्यरत रसायनज्ञ श्री के० पाठक के आभारी हैं।

निर्देश

1. ओनो, वाई०, फुकू, वाई० तथा केज़ेवा, एस०, **हीमेजे कोग्योडिज.गेम केक्या होकोका**, 1 960 **12**, 39-48.
2. क्वेन्जेल, ए० तथा वाल्थर, डब्ल्यू०, **लेडर**, 1963, **14**, 105-9.
3. इर्डमैन, एच०, **लेडर**, 1964, **15** (**B**), 181-89.
4. हिगेसी, के०, होरी, के० तथा ट्श्यूचिया, आर०, **बुले० केमि० सोसा० जापान**, 1967, **40**, 2569-72.
5. ल्यूमे, पी० तथा टयूमव्योरी, जे०, **ऐक्टा केमि० स्कैन्डिनेविका**, 1973, **27**, 2287-303.
6. खान, एस० ए० तथा तिवारी, बी० एम० एल०, **कन्वे० आफ केमिस्टस्**,(मद्रास) ING-36, 1981.
7. खान, एस० ए० तथा तिवारी, बी० एम० एल०, **इन्डि० काउं० आफ केमिस्ट्स की वार्षिक सभा** (आगरा), ING-60, 1981.
8. तिवारी, शीला, तिवारी, बी० एम० एल० तथा कपूर, ए० एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1978, **21**, 173-76.
9. तिवारी, शीला, तिवारी, बी० एम० एल० तथा कपूर, ए० एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** 1979, **22**, 223-27.
10. विल्सन, जे० ए०, Theory and practice in Leather manufacture रेनहोल्ड, न्यूयार्क, 1941.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4, 1985

एक चिरप्रतिष्ठित एवं एक परिवर्द्धित बहुचर H-फलनों के गुणनफल को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाले एक व्यापकीकृत समाकल रूपान्तर के कुछ मूलभूत गुणधर्म

वाई० एन० प्रसाद तथा एम० भार्गव
अप्लायड मैथमेटिक विभाग, इन्स्टिट्यूट आव टेकनोलॉजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 28, 1984]

सारांश

इस शोधपत्र में हमने अपने द्वारा परिभाषित Ω-रूपान्तर के कुछ मूलभूत गुणधर्मों को आठ नियमों द्वारा स्थापित किया है। ये परिणाम सिंह[9] द्वारा प्राप्त परिणामों के व्यापकीकरण हैं।

Abstract

On basic properties of a generalized integral transform involving product of a classical and a modified multivariable *H*-functions as kernel. *By* Y. N. Prasad and M. Bhargava, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi-5.

In this paper we establish some basic properties enjoyed by the Ω-transform defined by us in the terms of eight rules. The results are the immediate generalizations of the results obtained by Singh[9].

1. प्रस्तावना

श्रीवास्तव तथा अन्य[1] के अनुसार हम परम्परागत बहुचर H-फलन को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित तथा सांकेतिक रूप से प्रकट करते हैं

$$H^{o, N : (M', N'); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \left[\begin{array}{c|l} x_1 & \{(a_P; (\overset{(i)}{a_P})_{i=1, \ldots, r})\} : \\ \vdots & \\ x_r & \{(b_Q; (\overset{(i)}{\beta_Q})_{i=1, \ldots, r})\} : \end{array} \begin{array}{l} \{(\overset{'}{c_{P'}}, \overset{'}{\gamma_{P'}})\}; \ldots; \{(\overset{(r)}{c_{P(r)}}, \overset{(r)}{\gamma_{P(r)}})\} \\ \\ \{(\overset{'}{d_{Q'}}, \overset{'}{\delta_{Q'}}); \ldots; \{(\overset{(r)}{d_{Q(r)}}, \overset{(r)}{\delta_{Q(r)}})\} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \cdots \int_{L_r} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r)\, \psi(s_1, \ldots, s_r)\; x_1^{s_1}, \ldots, x_r^{s_r}\, ds_1, \ldots, ds_r, \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i) = \frac{\prod_{j=1}^{M^{(i)}} \Gamma(\overset{(i)}{d_j} - \overset{(i)}{\delta_j} s_i) \prod_{j=1}^{N} \Gamma(1 - \overset{(i)}{c_j} + \overset{(i)}{\gamma_j} s_i)}{\prod_{J=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \Gamma(1 - \overset{(i)}{d_j} + \overset{(i)}{\delta_j} s_i) \prod_{J=N^{(i)}+1}^{P} \Gamma(\overset{(i)}{c_j} - \overset{(i)}{\gamma_j} s_i)} \quad i = 1, \ldots, r \tag{1.2}$$

तथा

$$\psi(s_1, \ldots, s_r) = \frac{\prod_{j=1}^{N} \Gamma(1 - a_j + \sum_{i=1}^{r} \overset{(i)}{a_j} s_i)}{\left[\prod_{j=N+1}^{P} \Gamma(a_j - \sum_{j=1}^{r} (\overset{(i)}{a_j} s_i))\right] \times \left[\prod_{j=1}^{Q} \Gamma(1 - b_j + \sum_{j=1}^{r} (\overset{(i)}{\beta_j} s_i))\right]} \tag{1.3}$$

यहाँ और आगे भी मूर्धांक (i) डैशों की संख्या बताता है, उदाहरणार्थ $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P''$ इत्यादि $\omega = \sqrt{-1}$ $\{(a_p; (\overset{(i)}{a_p})_{i=1, \ldots, r})\}$ जिसे $\{(a_p; (\overset{(1)}{a_p}; \ldots, (\overset{(i)}{a_p})\}$ द्वारा भी व्यक्त करते हैं। P-प्राचलों

$$(a_1; (\overset{(i)}{a_1})_{i=1, \ldots, r}); \ldots; (a_p; (\overset{(i)}{a_p})_{i=1, \ldots, r})$$

का अनुक्रम है जबकि $\{(\overset{'}{c_N}, \overset{'}{\gamma_N})\}$ प्राचल $(c_1, \gamma_1), \ldots, (c_N, \gamma_N)$ का संक्षिप्त रूप है। रिक्त गुणनफल को तत्समक लिया गया है। ऊपर वर्णित गुणांक $\overset{(i)}{a_j}, \overset{(i)}{\beta_j}, \overset{(i)}{\gamma_j}, \overset{(i)}{\delta_j}$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं जबकि उसमें आये a_j, b_j, c_j, d_j सम्मिश्र संख्यायें हैं। यहाँ $N, P, Q, M^{(i)}, N^{(i)}, P^{(i)}, Q^{(i)}$ पूर्णांक हैं जो $0 \leqslant N \leqslant P$, $P \geqslant 0$, $Q \geqslant 0$, $0 \leqslant M^{(i)} \leqslant Q^{(i)}$, $0 \leqslant N^{(i)} \leqslant P^{(i)}$, $i = 1, \ldots, r$. को सन्तुष्ट करते हैं। सम्मिश्र s_i-तल में कंटूर L_i मेलिन-बार्निज प्रकार का है जो $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक इस प्रकार विस्तीर्ण है कि यह आवश्यकता अनुसार न केवल यह सुनिश्चित करता है कि कंटूर L_i(s_i-तल में) समाकल्य की

किसी विचित्रता को न काटे बल्कि दोनों प्रकार के Γ-फलनों की अनावश्यक विचित्रताओं के समुच्चय को अलग करता है । L_i इस प्रकार का है कि $\Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i)$ के ($j=1, \ldots, M^{(i)}$) के सारे पोल(अनंतक) दाहिनी ओर पड़ते हैं तथा

$$\Gamma\,(1-c_j^{(i)}+\gamma_j^{(i)} s_i)\;(j=1, \ldots, N^{(i)})$$

एवं

$$(1-a_j+\sum_{j=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)$$

के अनंतक इसके बाईं ओर पड़ते हैं। कंटूर समाकल (1.1) अभिसारी है यदि $|\arg x_i|<\frac{1}{2}\pi U_i,\ U_i>0$, $i=1, \ldots, r$ जबकि

$$U_i=\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{P} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{Q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \gamma_j^{(i)} \tag{1.4}$$

बहुचर H-फलन का उपगामी आचरण $(x_1, \ldots, x_n)$ के लघुमानों के लिए ब्राक्समा[2] की भाँति निम्न-लिखित द्वारा दिया जाता है ।

$$H^{0, N : (M', N); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = o,\ (|x_1|^{\alpha_1} \ldots |x_r|^{\alpha_r})$$

जबकि

$$\alpha_i=\min Re\,(d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)});\ j=1, \ldots, M^{(i)},\ i=1, \ldots, r. \tag{1.5}$$

और भी,

$$H^{0, N : (M', N'); \ldots; (M^{(r)}, N^{(r)})}_{P, Q : [P', Q']; \ldots; [P^{(r)}, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = 0(|x_1|^{\beta_1} \ldots |x_r|^{\beta_r})$$

$(x_1, \ldots, x_r)$, $\equiv N=0$ के दीर्घमानों के लिये, जहाँ

$$\beta_i=\max Re\,\{(c_j^{(i)}-1)/\,\gamma_j^{(i)}\};\ j=1, \ldots, N^{(i)},\ i=1, \ldots, r. \tag{1.6}$$

इस शोधपत्र में हमने निम्नलिखित श्रेणी प्रसार का उपयोग किया है जिसे सक्सेना[3], मुकर्जी एवं प्रसाद[4] की सहायता से स्थापित किया जा सकता है, अर्थात्

$$\mathsf{H}^{0,\,0\,:\,(1,\,n');\,\ldots;\,(1,\,n^{(r)})}_{p,\,q\,:\,[p',\,q'+1];\,\ldots;\,[p^{(r)},\,q^{(r)}+1]}\left[x_1,\,\ldots,\,x_r \,\middle|\, \begin{matrix}\{(e_j);\,E_p^{(i)})_{i=1,\,\ldots,\,r}\};\,\{(g'_{p'},G'_{p'})\};\\ \{(f_j;\,(F_q^{(i)})_{i=1,\,\ldots,\,r}\}:\,(h'_0,H'_0),\{(h'_{q'},H'_{q'})\};\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\ldots\,\{(g^{(r)}_{p(r)},G^{(r)}_{p(r)})\}\\ \ldots;\,(h_0^{(r)},H_0^{(r)}),\{(h^{(r)}_{q(r)},H^{(r)}_{q(r)})\}\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{r} H_0^{(i)}}\sum_{v_1,\ldots,v_r=0}^{\infty}\phi\,(\rho_{v_1},\,\ldots,\,\rho_{vr})\prod_{i=1}^{r}\theta_i\,(\rho_{vi})\,\frac{(-1)^{v_i}}{v_i!}\,(x_i)^{\rho v_i}$$

जबकि

$$\rho_{vi}=\frac{h_0^{(i)}+v_i}{H_0^{(i)}}, \tag{1.7}$$

$$\theta_i\,(\rho_{vi})=\frac{\prod\limits_{j=1}^{n^{(i)}}\Gamma(1-g_j^{(i)}+G_j^{(i)}\,\rho_{vi})}{\prod\limits_{j=1}^{q}\Gamma(1-h_j^{(i)}+H_j^{(i)}\,\rho_{vi})\prod\limits_{j=n^{(i)}+1}^{p}\Gamma(g_j^{(i)}-G_j^{(i)}\,\rho_{vi})},\ i=1,\,\ldots,\,r, \tag{1.8}$$

$$\rho_{vi},\,\ldots,\,\rho_{v}r)=\left[\prod_{j=1}^{p}\Gamma(e_j-\sum_{i=1}^{r}E_j^{(i)}\rho_{vi})\right]^{-1}\times\left[\prod_{j=1}^{q}\Gamma(1-f_j+\sum_{i=1}^{r}F_j^{(i)}\,\rho_{vi})\right]^{-1}, \tag{1.9}$$

जहाँ कि प्राचलों पर (1.1) द्वारा दिये गये तुल्य प्रतिबन्ध सन्तुष्ट होते हैं तथा

$$|\arg x_i|<\tfrac{1}{2}\pi U_i,\ U_i>0,\ i=1,\,\ldots,\,r;$$

जबकि

$$U_i=-\sum_{j=1}^{p}E_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{q}F_j^{(i)}+H_0^{(i)}-\sum_{j=1}^{q^{(i)}}H_j^{(i)}+\sum_{j=}^{n^{(i)}}G_j^{(i)}$$

$$-\sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}}G_j^{(i)}\ i=1,\,\ldots,\,r. \tag{1.10}$$

संक्षिप्तता के लिये, हम (1.7) के वाम पक्ष को $H^{(1)}[x_1, ..., x_r]$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे।

बुशमैन ने (1948) कई शोधपत्रों[5,6,7,8] में यह संकेत दिया है कि (दो चरों वाले H-फलनों के लिये) प्राचलों $\alpha_j, \beta_j, A_j, B_j$ तथा (बहुचर की दशा में) $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}$ के धनात्मकता के प्रतिबन्धों को शिथिल करके H-फलन का और भी विस्तार सम्भव हो सकता है। इसी से प्रेरित होकर प्रसाद तथा सिंह ने[9] कई सम्मिश्र चरों वाले परिवर्द्धित H-फलन की परिभाषा दी जिसका इस शोधपत्र में उपयोग किया गया है। यह परिवर्द्धित फलन विभिन्न विशिष्ट फलनों को और व्यापक बनाता है। उदाहरणार्थ फाक्स[10] के G-फलनों, H फलनों को, मित्तल तथा गुप्ता[11] के दो चरों वाले H-फलनों को, श्रीवास्तव तथा पण्डा[12] के कई सम्मिश्र चरों वाले H-फलन को। परिवर्द्धित बहुचर फलन को निम्नलिखित द्वारा परिभाषित तथा प्रदर्शित किया जावेगा :

$$\mathsf{H}^{0,\, n\,:\,\mathbf{R}\,:\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{P,\,Q\,:\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\ldots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}\left[\begin{matrix}\{(a_P;(\alpha_P^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}: \\ \{(b_Q;(\beta_Q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(\mathbf{l}_{\mathbf{R}};(\mathbf{U}_{\mathbf{R}}^{(i)},\bar{\lambda}_{\mathbf{R}}^{(i)})_{i=1,\ldots,r}\}:\{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ldots;\{(c^{(r)}_{P(r)},\gamma^{(r)}_{P(r)})\} \\ \{(l_R;(U_R^{(i)},\lambda_R^{(i)})_{i=1,\ldots,r}\}:\{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots;\{(d^{(r)}_{Q(r)},\delta^{(r)}_{Q(r)})\}\end{matrix}\,\middle|\, x_1,\ldots,x_r\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi\omega)^r}\int_{L_1}\cdots\int_{L_r}\phi_1(s_1),\ldots,\phi_r(s_r)\,\psi(s_1,\ldots,s_r)\,x_1^{s_1},\ldots,x_r^{s_r}\,ds_1,\ldots,ds_r \quad (1.11)$$

जबकि

$$\phi_i(s_i)=\frac{\prod_{i=1}^{M^{(i)}}\Gamma(d_j^{(i)}-\delta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{N^{(i)}}\Gamma(1-c_j^{(i)}+\gamma_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}}\Gamma(1-d_j^{(i)}+\delta_j^{(i)}s_i)\prod_{j=N^{(i)}+1}^{P}\Gamma(c_j^{(i)}-\gamma_j^{(i)}s_i)},\quad i=1,\ldots,r \quad (1.12)$$

$$\psi(s_i,\ldots,s_r)=\frac{\prod_{j=1}^{N}\Gamma(1-a_j+\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(i)}s_i)\prod_{j=1}^{\mathbf{R}}\Gamma(\mathbf{l}_j+\sum_{j=1}^{r}\mathbf{U}_j^{(j)}\bar{\lambda}_j^{(i)}s_i)}{\prod_{j=1}^{Q}\Gamma(1-b_j+\sum_{i=1}^{r}\beta_j^{(i)}s_i)\prod_{J=N+1}^{P}\Gamma(a_j-\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(i)}s_j)\prod_{j=1}^{R}\Gamma(l_j+\sum_{i=1}^{r}U_j^{(i)}\lambda_i^{(i)}s_i)}$$

मूर्धांक (i) तथा (1.11) में अन्तर्ग्रस्त प्राचल (1.1) की ही भाँति अर्थ रखते हैं। गुणांक $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \gamma_j^{(j)}$, $\delta_j^{(i)}, \lambda_j^{(i)}, \lambda_j^{(i)}$ धनात्मक वास्तविक संख्यायें हैं तथा इसमें आये $a_j, b_j, c_j^{(i)}, d_j^{(i)}, \mathbf{l}_j, l_j$ संमिश्र संख्यायें हैं। $U_j^{(i)}$ इकाई फलन है जो निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है

$$U_j^{(i)} = \begin{cases} +1 \text{ यदि पद } \lambda_j^{(i)} s_i \, j\text{वें गुणक में धन चिन्ह वाला हो} \\ -1 \text{ यदि पद } \lambda_j^{(i)} s_i \, j\text{वें गुणक में ऋण चिन्ह वाला हो} \end{cases}$$

$\mathbf{U}_j^{(i)}$ $(i=1, \ldots, r;\ j=1, \ldots, r)$ के लिए भी समान अर्थ है तथा ऋणात्मक पूर्णांक हैं जो $\psi(s_1, \ldots, s_r)$, के अंश तथा हर में आये Γ-फलन गुणकों के मिश्रित चिन्हों की संख्या है। सम्मिश्र s_i-तल में कंटूर L_i मेलिन-बार्निज प्रकार का है जो $-\omega_\infty$ से $+\omega_\infty$ तक इस प्रकार विस्तीर्ण है कि आवश्यकतानुसार $\Gamma(d_j^{(i)} - \delta_j^{(i)} s_i)$ $(j=1, \ldots, M^{(i)})$ के सारे अनंतक दायीं ओर तथा $\Gamma(1-c_j^{(i)}+\gamma_j^{(i)} s_j)$ $(j=1, \ldots, M^{(i)})$ एवं

$$\Gamma(1-a_j+\sum_{i=1}^{r} \alpha_j^{(i)} s_i)\ (j=1, \ldots, N)$$

के इसकी बायीं ओर हैं। और भी,

$$\Gamma(l_j+\sum_{i=1}^{r} \mathbf{U}_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} s_i)\ (j=1, r)$$

के अनंतक $\mathbf{U}_j^{(i)}$ के धनात्मक या ऋणात्मक होने के अनुसार L_i के बायीं या दाहिनी ओर हैं। यदि किसी प्रकार का भ्रम न हो तो (1.11) में परिभाषित परिवर्द्धित H-फलन के लिये निम्नलिखित रखना सुविधाजनक रहेगा

$$H[x_1, \ldots, x_r] \quad \text{या} \quad \mathsf{H}^{0,\, N\, :\, \mathbf{R}\, :\, (M',\, N)';\, \ldots;\, (M^{(r)},\, N^{(r)})}_{P,\, Q\, :\, R\, :\, [P'\, Q'];\, \ldots;\, [P^{(r)},\, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$$

उपर्युक्त फलन को जब $N=\mathbf{R}=O$ हो तो हम $H^{(2)}[x_1, \ldots, x_r]$ द्वारा व्यक्त करेंगे अर्थात्

$$H^2[x_1, \ldots, x_r] \quad \mathsf{H}^{0,\, 0\, :\, 0\, :\, (M',\, N');\, \ldots;\, (M^{(r)},\, N^{(r)})}_{P,\, Q\, :\, R\, :\, [P',\, Q'];\, \ldots;\, [P^{(r)},\, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

यह सुगमतापूर्वक देखा जा सकता है कि r-चरों वाला H-फलन (1.11) श्रीवास्तव एवं अन्य[1] द्वारा अधीत बहुचर H-फलन में समानीत हो जाता है यदि $\mathbf{R}=R=O$.

2. नया समाकल रूपान्तर

हम (1.7) द्वारा दिये गये बहुचर H-फलन तथा (1.11) द्वारा दिये गये परिवर्द्धित बहुचर H-फलन के गुणनफल को अष्टि के रूप में अन्तर्ग्रस्त करने वाले नये समाकल रूपान्तर की निम्नलिखित रूप में परिभाषा दे रहे हैं :

$$\phi[f:s]=\int_0^\infty K(s,x)\,f(x)\,dx=\Omega\,[f(x)]. \tag{2.1}$$

जबकि रूपान्तर की अष्टि $K(s, x)$ को निम्नलिखित द्वारा दिया जाता है

$$K(s,x)=(sx)^{\rho-1}\,H^{(1)}\,[\xi_1\,(sx)^{\sigma_1},\ldots,\xi_r\,(sx)^{\sigma_r}]\times H^{(2)}\,[z_1\,(sx)^{\mu_1},\ldots,z_r\,(sx)^{\mu_r}] \tag{2.2}$$

जहाँ $H^{(1)}\,[\xi_1(sx)^{\sigma_1},\ldots,\xi_r(sx)^{\sigma_r}]$ एवं $H^{(2)}\,[z_1(sx)^{\mu_1},\ldots,z_r(sx)^{\mu_r}]$ क्रमश: वही है जो (1.7) तथा (1.15) में है।

$|\arg(\xi_i s^{\sigma_i})|<\frac{1}{2}\pi U_i,\ U_i>0\ i=1,\ldots,r_2$ के लिए

$\mu_i>0,\ \sigma_i>0$

$|\arg(z_i\,s^{\mu_i})|<\frac{1}{2}\pi V_i,\ V_i>0\ i=1,\ldots,r$ के लिए

$$Re\left\{\rho+\nu+\sum_{i=1}^{r}\left(\mu_i\,a_i+\sigma_i\,\frac{h_0^{(i)}}{H_0^{(i)}}\right)\right\}>0,$$

$$Re\left\{\rho+\nu'+\sum_{i=1}^{r}\left(\mu_i\,\beta_i+\sigma_i\,\beta_i^*\right)\right\}<0, \tag{2.3}$$

a_i, β_i, U_i क्रमश: (1.5), (1.6), (1.10) द्वारा दिये जाते हैं।

$$V_i=-\sum_{j=1}^{P}a_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{Q}\beta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{M^{(i)}}\delta_j^{(i)}-\sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}}\delta_j^{(i)}+\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\gamma_j^{(i)}-\sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}}\gamma_j^{(i)}-\sum_{j=1}^{R}\lambda_j^{(i)},\ i=1,\ldots,r, \tag{2.4}$$

$$\beta_i=\max Re\left\{(g_j^{(i)}-1)/G_j^{(i)}\right\};\ j=1,\ldots,n^{(i)};\ i=1,\ldots,r \tag{2.5}$$

तथा

$$f(x)=\begin{cases}0(|x|^{\nu}) & \text{छोटा } x \text{ के लिये}\\ 0(|x|^{\nu'}) & \text{बड़ा } x \text{ के लिये}\end{cases}$$

हम $\phi\,[f:s]$ को $\phi(s)$ से व्यक्त करेंगे जब यह सुस्पष्ट हो तथा (2.1) द्वारा परिभाषित व्यापकीकृत रूपान्तर को Ω-रूपान्तर नाम देंगे।

3. रूपान्तर के मूलभूत गुणधर्म

इस खण्ड में हम (2.1) द्वारा परिभाषित Ω-रूपान्तर के कुछ मूलभूत गुणधर्मों तक ही अपने को सीमित रखेंगे। किन्तु, उपप्रमेयों के रूप में हम बतायेंगे कि ये गुणधर्म कई दूसरे समाकल रूपान्तरों में भी पाये जाते हैं जो कि इस Ω-रूपान्तर की विशेष स्थितियाँ हैं।

1. नियम 1 : रैखिकता

यदि

$$\phi_t(s) = \Omega\,[f_t(x)],\ t=1,\ \ldots,\ k \tag{3.1}$$

हो तो

$$\sum_{t=1}^{k} B_t\ \phi_t(x) = \Omega\left[\sum_{i=1}^{k} B_t f_t(x)\right], \tag{3.2}$$

जबकि B_t $(t=1, \ldots, k)$ सम्मिश्र संख्यायें हैं।

इस की उपपत्ति, जब K सीमित हो, सुस्पष्ट है। किन्तु उस दशा में जब K गणनीयतः अनंत हो परिणाम (3.2) वैध है बशर्ते कि निम्नलिखित प्रतिबन्ध तुष्ट होते हों

(i) $\sum_{i=1}^{\infty} B_t f_t(x)$ संवृत अन्तराल $0 \leqslant x \leqslant h$ $(h>0)$ में एकसमानतः अभिसारी है तथा

(ii) समाकल

$$\int_0^\infty |(sx)^{\rho-1}\, H^{o,\,o\,:\,o\,:\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{P,\,Q\,:\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\ldots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}\left[\begin{matrix}\{(a_P;\,(\alpha_P^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\,-\,: \\ \{(b_Q;\,(\beta_Q^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\{(l_R;\,(U_R^{(i)}\ \lambda_R^{(i)})_{i=1,\ldots,r})\}:\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ldots;\{(c^{(r)}_{P(r)},\gamma^{(r)}_{P(r)})\} \\ \{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots;\{(d^{(r)}_{Q(r)},\delta^{(r)}_{Q(r)})\}\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} z_1\,(sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r\,(sx)^{\mu_r}\end{matrix}\right]$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} B_t\, f_t(x)|\,dx \text{ अभिसरित होता है।}$$

उदाहरण

माना

$$f_t(x)=\frac{(-1)^t\,(1+\mu)_m\,x^t}{t!\,(m-t)!\,(1+\mu)_t}, \tag{3.3}$$

जहाँ

$$L_m^{\mu}(x)=\sum_{t=0}^{m}\frac{(-1)^t\,(1+\mu)_m\,x^t}{t!\,(m-t)!(1+\mu)_t}, \tag{3.4}$$

अनृणात्मक पूर्णांक m के लिये परिभाषित व्यापकीकृत लागेर बहुपद है। अब निम्नलिखित द्वारा व्यक्त कई सम्मिश्र चरों वाले परिवर्द्धित H-फलन के मेलिन रूपान्तर का उपयोग करने पर

$$\int_o^\infty (x)^{\rho-1}\,\mathbf{H}^{o,\,o\,:\,o\,:\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{P,\,Q\,:\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\ldots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}\begin{bmatrix} z_1\,(x)^{\mu_1}\\ \vdots \\ z_r\,(x)^{\mu_r}\end{bmatrix}dx$$

$$=\frac{1}{\mu_r}\;z_r^{-\rho/\mu_r}\,H\left[\rho:\frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}};\ldots;\frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right], \tag{3.5}$$

जबकि

$$H\left[\rho:\frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}};\ldots;\frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right]$$

$$=\mathbf{H}^{N^{(r)},\,M^{(r)}\,:\,o\,:\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{Q^{(r)}+P,\,P^{(r)}+Q\,:\,R\,;\,[P',\,Q'];\,\ldots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}$$

$$\left[\begin{matrix}\left\{\left(1-\frac{d^{(r)}}{Q^{(r)}}-\frac{\rho}{\mu_r}\;\delta^{(r)}_{Q(r)}\;;\left(\frac{\mu_i}{\mu_r}\;\delta^{(r)}_{Q(r)}\right)_{i=1,\,\ldots,\,r-1}\right)\right\}\\ \left\{\left(1-c^{(r)}_{P(r)}-\frac{\rho}{\mu_r}\;\gamma^{(r)}_{P(r)}\;;\left(\frac{\mu_i}{\mu_r}\;\gamma^{(r)}_{P(r)}\right)_{i=1,\,\ldots,\,r-1}\right)\right\}\end{matrix}\right.$$

$$\left\{\left(a_P+\alpha_P^{(r)}\,\frac{\rho}{\mu_r};\left(\alpha_P^{(i)}-\frac{\mu_i}{\mu_r}\;\alpha_P^{(r)}\right)_{i=1,\,\ldots,\,r-1}\right)\right\}:-:$$

$$\left\{\left(b_Q+\beta_Q^{(r)}\,\frac{\rho}{\mu_r}\;;\left(\beta_Q^{(i)}-\frac{\mu_i}{\mu_r}\;\beta_Q^{(r)}\right)_{i=1,\,\ldots,\,r-1}\right)\right\}:$$

$$\left\{\left(c'_{P'},\,\gamma'_{P'}\right)\right\};\;\ldots;$$

$$\left(l_R-U_R^{(r)}\;\lambda_R^{(r)}\;\rho\mu_r;\;\left(U_R^{(i)}\;\lambda_R^{(i)}-\frac{\mu_i}{\mu_r}\,U_R^{(r)}\;\lambda_R^{(r)}\right)_{i=1,\,\ldots,\,r-1}\right)\right\}:$$

$$\left.\begin{matrix}\left\{\left(c^{(r-1)}_{P(r-1)}, \gamma^{(r-1)}_{P(r-1)}\right)\right\} \\ \left\{\left(d'_{Q'}, \delta'_{Q'}\right)\right\}; \ldots; \left\{\left(d^{(r-1)}_{Q(r-1)}, \delta^{(r-1)}_{Q(r-1)}\right)\right\}\end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} z_1/z_r^{\mu_1/\mu_r} \\ \vdots \\ z_{r-1}/z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}\end{matrix}, \right], \quad (3.6)$$

बशर्ते कि

$$\mu_i > 0,\ Re\ (\rho + \sum_{i=1}^{r} \mu_i\, a_i) > 0,$$

$$Re\ (\rho + \sum_{i=1}^{r} \mu_i\, \beta_i) < 0,\ |\arg\ (z_1\, s^{\mu_i})| < \tfrac{1}{2}\, \pi\, V_i,$$

$V_i > 0, (i=1, \ldots, r)$ जहाँ a_i, β_i तथा V_i क्रमशः (1.5), (1.7) एवं (1.10) समीकरणों द्वारा दिये जाते हैं। और भी, समीकरण (1.7) द्वारा दिये गये $H^{(1)}\ [x_1, \ldots, x_r]$ को रखकर हम निम्नलिखित को प्राप्त करते हैं

$$\phi_t\ (s) = \frac{(-1)^t\ (1+\mu)_m}{t!\ (m-t)!\ (1+\mu)_t \prod_{i=1}^{r} H_0^{(i)}}$$

$$\sum_{v_1, \ldots, v_r = 0}^{\infty} \phi\ (\rho_{v1}, \ldots, \rho_{vr})\ _{(s)}\{\rho + \sum_{1}^{r} (\sigma_i\, \rho_{vi}) - 1\}\ z_r$$

$$\prod_{i=1}^{r} \left\{ \theta_i\ (\rho_{vi})\ \frac{(-1)^{v_i}}{v_i!}\ (\xi_i)^{\rho v_i} \right\} H \left[\rho + \sum_{1}^{r} \sigma_i\, \rho_{vi} + t\ ; \right.$$

$$\left. \frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}}, \ldots, \frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}} \right], \quad (3.7)$$

(3.7) की दायीं ओर में आने वाले H-फलनों को समीकरण (2.6) द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा (3.6) के लिये वैध प्रतिबन्ध भी सन्तुष्ट होते हैं। अतः नियम 1 से हम पाते हैं कि

$$\int_0^{\infty} (sx)^{\rho-1}\ \mathrm{H}^{o,\, o\, :\, o\, :\, (M',\, N');\, \ldots;\, (M^{(r)},\, N^{(r)})}_{P,\, Q\, :\, R\, :\, [P',\, Q']:\, \ldots;\, [P^{(r)},\, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} z_1\ (sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r\ (sx)^{\mu_r} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}^{o,\, o\, :\, (1,\, n');\, \ldots;\, (1,\, n^{(r)})}_{p,\, q\, :\, [p',\, q'+1];\, \ldots;\, [p^{(r)},\, q^{(r)}+1]} \begin{bmatrix} \xi_1\ (sx)^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xi_r\ (sx)^{\sigma_r} \end{bmatrix}$$

$$L_m\ (x)\ dx = \sum_{t=0}^{\infty} \phi_t\ (s)$$

$$=\frac{(1+\mu)_m}{\mu_r \prod_{i=1}^{r} H_0^{(i)}} \sum_{v_1,\ldots,v_r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \phi(\rho_{v1}, \ldots, \rho_{vr})$$

$$\prod_{i=1}^{r} \{\theta_i(\rho_{vi}) \frac{(-1)^{v_i}}{!v_i} (\xi_i)^{\rho v_i} \frac{(-1)^t}{t!(m-t)!(1+\mu_t)}$$

$$s^{\rho+\sum_1^r(\sigma_i \rho_{vi})-1} \frac{-\rho+\sum_1^r \sigma_i \rho_{vi})+t}{z}$$

$$H\left[\rho+\sum_1^r(\sigma_i\rho_{vi})+t;\ \frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}}, \ldots, \frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right], \tag{3.8}$$

बशर्ते $\mu_i>0$, $\sigma_i>0$, $|\arg(\xi_i s^{\sigma_i})|<\frac{1}{2}\pi U_i$, $U_i>0$ $i=1, \ldots, r$, के लिये

$|\arg(z_i s^{\mu_i})| <\frac{1}{2}\pi V_i >0$ $i=1, \ldots, r$ के लिये

$$Re(\rho) >0,\ Re\left\{+\rho \sum_1^r \left(\mu_i \alpha_i+\sigma_t \frac{h_0^{(i)}}{H_0^{(i)}}\right)\right\}>0,$$

$$Re\left\{\rho+\sum_{i=1}^r\left(\mu_i \beta_i + \sigma_i \beta_i^*\right)\right\}<0,$$

जबकि α_i, β_i, β^*_i, U_i, V_i क्रमशः (1.5), (1.6), (2 7), (1.10) तथा (2.4) समीकरणों द्वारा दिये जाते हैं।

नियम 2 : समरूपता

यदि

$$\phi(s)=s\,\Omega[f(x)] \tag{3.2}$$

हो तो

$$\phi(s/b)=s\,\Omega[f(bx)], \tag{3.10}$$

जबकि एक अशून्य संख्या है तथा $f(x)$ इस प्रकार का है कि (3.10) का अस्तित्व होता है।

उपपत्ति

उपपत्ति अत्यन्त सरल है।

नियम 3 : अनन्त समाकल प्रमेय

यदि

$$\phi\,(s)=\Omega\,[f(x)], \tag{3.11}$$

हो तो

$$\int_0^\infty s^{-v}\,\phi\,(s)\,ds=\frac{1}{\mu_r \prod_{i=1}^{r} H_0^{(i)}} \sum_{v_1,\ldots,v_r=0}^{\infty} \phi_i\,(\rho_{v1},\ldots,\rho_{vr})$$

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{\theta_i\,(\rho_{vi})\frac{(-1)}{v_i!}\,(\xi_i)^{\rho v_i}\right\} z_r^{\frac{\rho+\sum_{i=1}^{r}(\sigma_i\,\rho_{vi})-v}{\mu_r}}$$

$$H\left[\rho+\sum_{1}^{r}\sigma_i\,\rho_{vi}-v:\frac{z_1}{z_r^{\mu_1/\mu_r}},\ldots,\frac{z_{r-1}}{z_r^{\mu_{r-1}/\mu_r}}\right]$$

$$\int_0^\infty x^{\rho-1}f(x)\,dx, \tag{3.12}$$

बशर्ते कि

(a) समाकल $\int_0^\infty x^{v-1}f(x)\,dx$ तथा $\int_0^\infty s^{-v}\,\phi\,(s)\,ds$ निरपेक्षतः अभिसारी हैं ।

(b) $f(x)$ बिन्दु $x=0,\ c>0,$ के सामीप्य में परिबद्ध विचरण वाला है

(c) $f(x)=\begin{cases} o(x^{v'}),\ Re\,(v')>0, & x \text{ के लघुमान के लिये} \\ o(e^{-v''x}),\ Re\,(v'')>0, & x \text{ के दीर्घमान के लिये;} \end{cases}$

(d) $$Re\left\{\rho-v+\sum_{i=1}^{r}\left(\mu_i\,\alpha_i+\sigma_i\,\frac{h_0^{(i)}}{H_0^{(i)}}\right)\right\}>0,$$

$$Re\left\{\rho-v+\sum_{i=1}^{r}\left(\mu_i\,\beta_i+\sigma_i\,\beta_i^{*}\right)\right\}<0,$$

$|\arg z_i|<\frac{1}{2}\pi\,V_i\,(V_i>0\ i=1,\ \ldots,r$ के लिये)

$|\arg \xi_i|<\frac{1}{2}\,U_i\,(U_i>0\ i=1,\ldots,r$ के लिये)

जबकि $\alpha_i, \beta_i\, \beta^*_i, U_i, V_i$ के सामान्य अर्थ हैं। समीकरण (3.12) के दायीं ओर में आने वाले H-फलन का (3.6) द्वारा दिये जाने वाला साधारण अर्थ है।

उपपत्ति

उपपत्ति मूलतः इस पर आधारित है कि (3.11) के दोनों पक्षों को $s^{-\rho}$ से गुणा करें तथा सीमा o से ∞ के बीच s के सापेक्ष समाकलन करें एवं समाकलन के क्रम को परिवर्द्धित करने (जो कि परिकल्पित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत उचित है) के बाद अन्त में (3.5) द्वारा दिये गये मेलिन-रूपान्तर का प्रयोग करें।

नियम 4 : व्यापकीकृत पार्सेवाल-गोल्डस्टीन सूत्र

यदि

$$\phi_1 (s)=\Omega\, [f_1 (x)] \tag{3.13}$$

तथा

$$\phi_2 (s)=\Omega\, [f_2(x)]; \tag{31.4}$$

हो, जबकि $f_1 (x)$ एवं $f_2 (x)$ $x \geqslant 0$ के लिये सतत हैं, तो

$$\int_0^\infty \phi_1 (x) f_2 (x)\, dx= \int_0^\infty \phi_2 (x) f_1 (x)\, dx, \tag{3.15}$$

बशर्ते कि (3.15) में दोनों समाकल निरपेक्षतः अभिसारी हों।

उपपत्ति

हम पाते हैं कि

$$\int_0^\infty \phi_1 (s) f_2 (s)\, ds=\int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty (sx)^{\rho-1} H^{o,\, o\, :\, o\, :\, (M',\, N');\, \ldots;}_{P,\, Q\, :\, R\, [P',\, Q'];\, \ldots;}\right.$$

$$\begin{matrix}(M^{(r)}, N^{(r)}) \\ [P^{(r)}, Q^{(r)}]\end{matrix} \begin{bmatrix} z_1 (sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r (sx)^{\mu_r} \end{bmatrix} H^{o,\, o\, (1,\, n');\, \ldots;\, (1,\, n^{(r)})}_{p,\, q\, :\, [p',\, q'+1];\, \ldots;\, [p^{(r)},\, q^{(r)}+1]}$$

$$\left. \begin{bmatrix} \xi_1 (sx)^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xi_2 (sx)^{\sigma_r} \end{bmatrix} f_2 (s)\, ds \right\} dx,$$

(समाकलन के क्रम को परिवर्तित करके)

इससे उपपत्ति पूरी हो जाती है।

नियम 5.

यदि

$$\phi s = s\, \Omega\, [f(x)], \tag{3.16}$$

हो तो

$$\int_0^\infty 1/s\, \phi(s)\, ds = s\, \Omega \left[\int_0^\infty \frac{f(v)}{V}\, dv \right], \tag{3.17}$$

बशर्ते कि (3.17) में समाकल का अस्तित्व हो ।

उपपत्ति

यदि $\phi(x)$ एवं $f(x)$ (3.16) द्वारा सम्बद्ध हों तो नियम 2 से हम पाते हैं कि

$$\phi(s/t) = s\, \Omega\, [f(tx)], \tag{3.18}$$

(3.18) में दोनों पक्षों को t^{-1} से गुणा करके तथा t के सापेक्ष में सीमाओं o से ∞ के बीच समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\int_0^\infty 1/t\, \phi(s/t)\, dt = \int_0^\infty s\, 1/t \left\{ (sx)^{\rho-1} H^{o,\, o\, :\, o\, :\, (M',\, N');\, \ldots;\, (M^{(r)},\, N^{(r)})}_{P,\, Q\, :\, R\, :\, [P',\, Q'];\, \ldots;\, [P^{(r)},\, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} z_1\, (sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r\, (sx)^{\mu_r} \end{bmatrix} H^{o,\, o\, :\, (1,\, n');\, \ldots;\, (1,\, n^{(r)})}_{p,\, q\, :\, [p',\, q'+1];\, \ldots;\, [p^{(r)},\, q^{(r)}+1]} \begin{bmatrix} \xi_1\, (sx)^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xi_r\, (sx)^{\sigma_r} \end{bmatrix} f(tx)\, dx \right\} dt,$$

जो कि समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर और आगे निम्नलिखित देता है

$$= \int_0^\infty (sx)^{\rho-1} H^{o,\, o\, :\, o\, :\, (M'\, N');\, \ldots;\, (M^{(r)},\, N^{(r)}}_{P,\, Q\, :\, R\, :\, [P',\, Q'];\, \ldots;\, [P^{(r)},\, Q^{(r)}]} \begin{bmatrix} z_1\, (sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ z_r\, (sx)^{\mu_r} \end{bmatrix} H^{o,\, o\, :\, (1,\, n');\, \ldots;\, (1,\, n^{(r)})}_{p,\, q\, :\, [p',\, q'+1];\, \ldots;\, [p^{(r)},\, q^{(r)}+1]} \begin{bmatrix} \xi_1\, (sx)^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xi_r\, (sx)^{\sigma_r} \end{bmatrix} \left\{ \int_0^\infty \frac{f(tx)}{t}\, dt \right\} dx, \tag{3.19}$$

बशर्ते कि समाकलन क्रम का परिवर्तन अनुमन्य हो । अन्त में, (3.19) के वाम पक्ष में चरों के समुचित परिवर्तन यथा $(t = s/z)$ एवं दक्षिण पक्ष में $(t = u/x)$ हमें अभीष्ट की प्राप्ति हो जाती है ।

नियम 6.

यदि

$$1/s\ \phi\ (s)=\Omega\ [f(x)], \tag{3.20}$$

हो तो

$$\int_s^\infty 1/s\ \phi\ (s)\ ds=s\ \Omega\left[\int_0^x 1/v\ f(v)\ dv\right], \tag{3.21}$$

बशर्ते कि (3.21) में समाकल का अस्तित्व हो।

उपपत्ति

उपपत्ति पूर्ववर्ती नियम की उपपत्ति के ठीक समान है। अन्तर केवल इतना है कि इस दशा में समाकलन o से ∞ की सीमा के बदले o से 1 की सीमा में किया जाता है।

उपप्रमेय

नियम 6 की परिकल्पना के अधीन हम पाते हैं कि

$$\int_0^\infty 1/s\ \phi\ (s)\ ds=\Omega\left[\int_x^\infty 1/v\ f(v)\ dv\right]. \tag{3.22}$$

उपपत्ति सरल है।

नियम 7.

यदि

$$\phi\ (s)=s\ \Omega\ [f(x)\ dx], \tag{2.23}$$

हो तो

$$-s\frac{d}{ds}\ [\phi\ (s)]=s\ \Omega\left[x\frac{d}{dx}f\ (x)\right], \tag{3.24}$$

बशर्ते कि दोनों फलनों $\phi\ (x)$ एवं $f\ (x)$ का अस्तित्व हो और वे सतत हों।

उपपत्ति

नियम 2 के अनुसार, नियम 7 की परिकल्पना के अधीन हम पाते हैं कि

$$\phi\,(s/t)=\Omega\,[f(tx)]. \tag{3.25}$$

परिणाम (3.24) को स्थापित करने के लिये हम पहले (3.25) को t के सापेक्ष में अवकलित करते हैं और फिर $t=1$ रखते हैं।

उपप्रमेय

नियम 7 का बार बार उपयोग करके हम पाते हैं कि

$$\left(-s\frac{d}{ds}\right)^N \phi(s) = s\,\Omega\left[\left(x\frac{d}{dx}\right)^N f(x)\right], \tag{3.26}$$

बशर्ते कि $\phi(x)$ एवं $f(x)$ के Nवें अवकलनों का अस्तित्व हो और वे सतत हों।

नियम 8.

यदि $1/s\,\phi_1(s)$ एवं $1/s\,\phi_2(s)$ क्रमशः $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ के Ω-रूपान्तर हों जबकि $f_1(x)$ तथा $f_2(x)$ $x>o$ के लिये सतत हैं तो

$$\Omega\left[\int_0^\infty \phi_2(y) f_1(xy)\frac{d}{dy}\right] = \Omega\left[\int_0^\infty \phi_1(y) f_2(xy)\frac{dy}{y}\right] \tag{3.27}$$

बशर्ते कि (3.27) में समाकलों का अस्तित्व हो।

उपपत्ति

हम पाते हैं कि

$$\Omega\left[\int_0^\infty \phi_2(y) f_1(xy)\frac{du}{dy}\right] = \int_0^\infty 1/y\,\phi_2(y)\left\{\int_0^\infty (sx)^{\rho-1}\right.$$

$$H^{o,\,o\,:\,o\,:\,(M',\,N');\,\ldots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{P,\,Q\,:\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\ldots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]}\left[\begin{matrix} z_1(sx)^{\mu_1} \\ \vdots \\ {}_rz\,(sx)^{\mu_r}\end{matrix}\right]$$

$$\left.H^{o,\,o\,:\,(1,\,n'):\,\ldots;\,(1,\,n^{(r)})}_{p,\,q\,:\,[p',\,q'+1];\,\ldots;\,[p^{(r)},\,q^{(r)}+1}\left|\begin{matrix} \xi_1(sx)^{\sigma_1} \\ \vdots \\ \xi_r(sx)^{\sigma_r}\end{matrix}\right| f_1(xy)\,dx\right\}dy \tag{3.28}$$

$$= \int_0^\infty \phi_2(y)\phi_1(s/y)\frac{dy}{y},$$

बशर्ते कि समाकलन में क्रम परिवर्तन वैध हो। इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि

$$\Omega\left[\int_0^\infty \phi_2(y) f_2(xy)\frac{dy}{y}\right] = \int_0^\infty \phi_1(y)\phi_2(s/y)\frac{dy}{y}. \tag{3.29}$$

अब यह दिखाना सरल है कि (3.28) एवं (3.29) के दक्षिण पक्ष समान हैं।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, एच० एम०, गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी०, The *H*-function of one and two variables with applications, साउथ एशियन पब्लिशर्स, नई दिल्ली, मद्रास, 1982.

2. ब्राक्समा, बी॰ एल॰ जे॰, Comp. Math., 1964, **15**, 239-341.

3. सक्सेना, आर॰ के॰, Kyungpook Math. J., 1977, **17**, 221-26.

4. मुकर्जी, एस॰ एन॰ तथा प्रसाद, वाई॰ एन॰, The Mathematics Education, 1971, **5**, 5-12.

5. बुशमैन, आर॰ जी॰, **ज्ञानाभ**, 1977, 7, 107-118.

6. बुशमैन, आर॰ जी॰, Indian J. Math., 1978, **20**, 139-153.

7. बुशमैन, आर॰ जी॰, Pure Appl. Math. Sci., 1979, **XI**, 13-18.

8. बुशमैन, आर॰ जी॰, (मुद्रण पूर्व प्रचारित), 1978.

9. सिंह, ए॰ के॰, **पी॰ एच॰ डी॰ थीसिस**, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, 1980.

10. फाक्स, सी॰, Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, 395-429.

11. मित्तल, पी॰ के॰ तथा गुप्ता, के॰ सी॰, Proc. Ind. Acad. Sci. 1972, **34**, 117-123.

12. श्रीवास्तव, एच॰ एम॰ तथा पण्डा, आर॰, J. Reine, Angew. Mate., 1976, **283/284**, 265-275.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Vol. 28, No. 4, 1985

जिराम, ऐट्राजिन तथा 2-4 डी का ट्रिटिकेल और गेहूँ के अंकुरण पर प्रभाव

शिव गोपाल मिश्र, उमेश सिंह तथा अम्बरीष तिवारी

कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग,

इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त--जुलाई 9, 1985]

सारांश

जिराम, ऐट्राजिन तथा 2, 4-डी का प्रयोग कृषि में किया जाता है। जिराम एक विख्यात कवकनाशी है जबकि ऐट्राजिन तथा 2, 4-डी शाकनाशी हैं। प्रयोग द्वारा यह देखा गया कि मिट्टी में उपर्युक्त तीनों जीवनाशियों का प्रभाव ट्रिटिकेल तथा विजया गेहूँ के अंकुरण पर देखा गया। यह पाया गया कि जब जिराम को ऐट्राजिन के साथ प्रयुक्त किया जाता है तो ट्रिटिकेल के बीज-अंकुरण पर अच्छा प्रभाव पड़ता है। इसी तरह जिराम के साथ 2-4 डी का प्रयोग करने से विजया गेहूँ का अंकुरण ठीक से होता है। जिराम की उपस्थिति से बीजों पर कवक का आक्रमण नहीं होता।

Abstract

Effect of Ziram, Atrazine and 2, 4-D on the germination of triticale and Vijaya wheat. *By* S. G. Misra, Umesh Singh and Ambarish Tiwari, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Ziram, Atrazine and 2,4-D are widely used as pesticides in agriculture today. Ziram is used as fungicide while atrazine and 2, 4-D are well-known herbicides. It has been observed that when these three pesticides are used in soil, they affect germination of triticale and wheat. A mixture of Ziram and Atrazine is useful for the healthy germination of triticale, while a mixture of Ziram and 2, 4-D is beneficial for the germination of Vijaya wheat. Ziram helps in inhibiting fungus attack on the germinating seeds.

आजकल फसल सुरक्षा के लिये अनेक प्रकार के जीवनाशी रसायन प्रयोग में लाये जा रहे हैं, किन्तु इनमें से अल्पस्थायी रसायनों पर विशेष बल दिया जाता है। भारत में डाइथायोकार्बामेट वर्ग

के एक कवकनाशी 'जिराम' (जिंक-डाइमेथिल डाइथायोकार्बामेट) का प्रयोग, हानिप्रद कवकों द्वारा उत्पादित कई व्याधियों का नियंत्रण में करने के लिये किया जा रहा है। कुछ यूरोपीय देशों में किये गये प्रयोगों के अनुसार यह मृदा में 1.5 से 3 माह तक में पूर्णतः विघटित हो जाता है। यह भी पाया गया है कि भारत की गर्म जलवायु में लगभग 60 प्रतिशत तक विघटित हो जाता है। इसी प्रकार 'ऐट्राजिन' तथा '2-4 डी' का प्रयोग खरपतवार-नियंत्रण में हो रहा है। ऐट्राजिन मृदा में अधिक से अधिक 18 माह तक स्थायी रह पाता है। स्पष्ट है कि मृदा में इन जीवनाशियों के डालने पर तुरन्त बोई जाने वाली फसल के अंकुरण पर भी प्रभाव पड़ता होगा। प्रस्तुत शोध-पत्र में ट्रिटिकेल और गेहूँ पर जिराम, ऐट्राजिन और 2, 4-डी के प्रभाव का अध्ययन करने के उद्देश्य से प्रयोग किये गये।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये भारतीय कृषि अनुसंधान परिषद, दिल्ली से प्राप्त 'ट्रिटिकेल' के बीज तथा गेहूँ की 'विजया' नामक प्रजाति के बीज चुने गये। जीवनाशी रसायनों में जिराम, हिन्दुस्तान सीबा-गाइगी लिमिटेड, बम्बई, से 'क्यूमान-एल' के नाम से तथा ऐट्राजिन भारत पल्वराइजिंग मिल्स लिमिटेड, बम्बई से प्राप्त किया गया। '2, 4-डी' अपने विभाग से प्राप्त हुआ।

अंकुरण करने के लिये स्थानीय मिट्टी काम में लायी गई जिसका पी-एच 7·5 था। मिट्टी को छोटे-छोटे प्लास्टिक के बने गमलों में निश्चित मात्रा में (200 ग्राम प्रति गमला) लिया गया। इस मिट्टी में जीवनाशियों की ज्ञात मात्रायें डाल कर मिट्टी के साथ भली-भाँति मिला दिया गया। तीनों जीवनाशियों के 5 ppm तथा 10 ppm सान्द्रता के घोल बनाकर उसका 10 मि० ली० प्रत्येक गमलें की मिट्टी में मिलाया गया। उपचारों में तीनों जीवनाशियों की अलग-अलग तथा जिराम के साथ भी उपचार सम्मिलित किये गये। उपचार इस प्रकार थे—

गमला	घोल का सान्द्रण (मात्रा—10 मिली०)
K	नियंत्रण
A	5 ppm जिराम
B	10 ppm जिराम
C	5 ppm ऐट्राजिन
D	10 ppm एट्राजिन
E	5 ppm जिराम + 5 ppm ऐट्राजिन
F	10 ppm जिराम + 10 ppm ऐट्राजिन
G	5 ppm 2, 4-डी
H	10 ppm 2, 4-डी

I	5 ppm जिराम+5 ppm ऐट्राजिन
J	10 ppm जिराम+10 ppm ऐट्राजिन

प्रत्येक गमले में ट्रिटिकेल तथा विजया गेहूँ के 15-15 बीज बोये गये और प्रत्येक तीसरे दिन आसुत जल (लगभग 20 मि० ली०) से सींचकर मिट्टी को नम रखा गया। बुवाई के चौथे, आठवें और बारहवें दिन अंकुरित बीजों की गणना की गई। प्राप्त परिणाम सारणी 1 में दिखाये गये हैं और प्रतिशत अंकुरण सूचित किया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

ट्रिटिकेल में अंकुरण

नियंत्रण (K) में बारहवें दिन तक 86 प्रतिशत अंकुरण हुआ। 5 ppm जिराम मिलाने से गमला A में भी नियंत्रण के समान अंकुरण हुआ किन्तु जिराम द्वारा उपचारित अन्य किसी गमले में अंकुरण प्रतिशत इतना अधिक नहीं देखा गया।

कवकनाशी जिराम की कम सान्द्रता (5 ppm) से सर्वोत्तम अंकुरण हुआ जब कि अधिक (10 ppm) के प्रयोग से अंकुरण प्रतिशत में कमी आयी। शाकनाशी ऐट्राजिन की कम सान्द्रता तथा अधिक सान्द्रता दोनों के ही प्रयोग से अंकुरण पर ऋणात्मक प्रभाव पड़ा। यही नहीं, नियंत्रण गमले में तथा शाकनाशी की दोनों सान्द्रताओं के उपचारित गमलों में कवक विकसित होता पाया गया। नियंत्रण में 40 प्रतिशत बीजों पर कवक लगा और ऐट्राजिन की कम सान्द्रता पर 32 प्रतिशत बीजों में लगा। सबसे अधिक कवक ऐट्राजिन की अधिक सान्द्रता वाले गमले में लगा। इस गमले में अंकुरित और कवक लगे बीजों का प्रतिशत बराबर-बराबर था।

प्रयोग द्वारा पहले से ज्ञात था कि शाकनाशी कवक के प्रति अधिक संवेदनशील होते हैं, अतएव शाकनाशी मिलाकर प्रयोग किये गये। ऐसा करने पर कुछ आशानुकूल परिणाम मिले। ऐट्राजिन और जिराम के कम सान्द्रण वाले गले में अंकुरण 72 प्रतिशत रहा और कवक नहीं लगा। यही नहीं, जिराम की सान्द्रता बढ़ाने पर अपेक्षाकृत अधिक (80 प्रतिशत) अंकुरण हुआ और कवक की भी प्रभाव नहीं पड़ा। स्पष्ट है कि मिट्टी में जिराम डालने के कवक का प्रकोप कम होता है और बीज स्वस्थ रहने के कारण अंकुरण भी अच्छा होता है।

गेहूँ में अंकुरण

गेहूँ 'विजया' में भी ट्रिटिकेल जैसे ही परिणाम प्राप्त हुए। मिट्टी में जिराम या ऐट्राजिन की सान्द्रता बढ़ा दिये जाने पर अंकुरण प्रतिशत में कमी आयी। सारणी 1 में गेहूँ के अंकुरण पर जिराम तथा ऐट्राजिन का प्रभाव स्पष्ट है।

गेहूँ 'विजया' में भी नियंत्रण गमले में तथा ऐट्राजिन से उपचारित गमले के बीजों में कवक विकसित हुआ। जिराम और ऐट्राजिन बराबर-बराबर सान्द्रणों के प्रयोग से कवक के विकास पर तो

सारणी 1

जिराम, ऐट्राजिन और 2, 4-डी की उपस्थिति में गेहूँ और ट्रिटिकेल का अंकुरण प्रतिशत

	ट्रिटिकेल का अंकुरण प्रतिशत							गेहूँ 'विजया' का अंकुरण प्रतिशत									
दिन	A	B	C	D	E	F	K	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
4	60 (0)	40 (0)	66 (20)	46 (26)	52 (0)	60 (0)	80 (20)	33 (0)	33 (0)	40 (0)	53 (6)	40 (0)	53 (0)	33 (6)	40 (0)	40 (0)	60 (0)
8	86 (0)	60 (0)	72 (32)	66 (40)	72 (0)	72 (0)	80 (40)	53 (0)	46 (0)	53 (6)	60 (12)	60 (0)	53 (0)	53 (12)	60 (12)	60 (0)	80 (0)
1	86 (0)	60 (0)	7 (32)	66 (66)	72 (0)	80 (0)	86 (40)	80 (0)	73 (0)	73 (6)	73 (20)	66 (0)	66 (0)	80 (12)	80 (32)	86 (0)	93 (0)

[कोष्ठक में दिये गये अंक बीजों में लगे कवक का प्रतिशत प्रदर्शित करते हैं ।]

अंकुश लग गया किन्तु अंकुरण प्रतिशत बढ़ाने में आशानुरूप सफलता नहीं मिली। इस प्रकार कवक के प्रभाव तथा अंकुरण प्रतिशत में आयी कमी को दूर करने के लिये एक अन्य शाकनाशी 2, 4-डी का प्रयोग इस दृष्टि से किया गया कि शायद अंकुरण में साहयता मिले। संयोगवश 2, 4-डी के प्रयोग से अधिक लाभप्रद परिणाम प्राप्त हुए।

2,4-डी के प्रयोग के सबसे अधिक लाभ हुआ। इस शाकनाशी के प्रयोग से पहले चार दिन तक तो अंकुरण मध्यम गति से होता है किन्तु बाद में आठवें तथा बारहवें दिन तक अंकुरण प्रतिशत नियंत्रण से कुछ ही कम रह जाता है। 2, 4-डी के प्रयोग से कवक के आक्रमण में तो कमी आयी किन्तु वह पूरी तरह समाप्त नहीं हुआ। कवकनाशी जिराम की दोनों सान्द्रताओं के प्रयोग से गेहूँ विजया के अंकुरण में आयी हुई आंशिक कमी को दूर करने में, 2, 4-डी ने उल्लेखनीय योगदान किया। जिराम औ 2, 4-डी को मिला कर मिट्टी में प्रयोग करने से एक और तो अंकुरण प्रतिशत में वृद्धि हुई और दूसरी ओर कवक भी पूर्णतया समाप्त हो गये। इस प्रकार गेहूँ में जिराम और 2, 4-डी का अधिक सान्द्रता वाला (10 ppm) मिश्रण अधिक लाभप्रद रहा। गमला J में नियंत्रण की अपेक्षा अधिक अंकुरण हुआ और कवक रहित रहे।

इस प्रकार ट्रिटिकेल के लिये, जिराम तथा ऐट्राजिन की अधिक सान्द्रता वाला घोल तथा गेहूँ (विजया) के लिये जिराम के साथ 2, 4-डी का अधिक सान्द्रता वाला घोल लाभ प्रद सिद्ध हुए।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 28, No. 4. 1985

$H[z_1, z_2]$ का जैकोबी फलनयुक्त श्रेणियों में विस्तार

अशोक कुमार रोंघे

एस० एस० एल० जैन हायर सेकेन्ड्री स्कूल, विदिशा (म० प्र०)

[प्राप्त—जून 17, 1985]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जैकोबी फलन के गुणनफलयुक्त सान्त समाकलनों और दो अचर राशियों के H-फलन के कोणांक (Arguments) का विशिष्टीकरण करके मूल्यांकन किया गया है। प्रपत्र में सान्त समाकलनों का, जिसमें जैकीबी फलन युक्त श्रेणियाँ हैं, $H[z_1, z_2]$ के विस्तार में प्रयोग करते हैं। चूंकि दो चरों $H[z_1, z_2]$ वाले फलन अत्यन्त व्यापक फलनों में से हैं अत: इसके प्राचलों के विशिष्टिकरण से अनेक नवीन एवं ज्ञात परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में ज्ञात कर सकते हैं।

Abstract

Some expansion for the *H*-function of two variables in series involving Jacobi polynomial. *By* Ashok Kumar Ronghe, S. S. L. Jain Higher Secondary School, Vidisha (M. P.).

In this paper few finite intergrals involving product of Jacobi polynomials and H-function of two variables of generalized arguments have been evaluated. These integrals have been utilized to establish the expansion formulae for $H[z_1 z_2]$ function in series involving products of Jacobi polynomials since H-function of two variables is quite general function in nature. On specializing the parameters of the functions involved in results, many new as well as known relations may be obtained as particular cases.

1. दो अचर राशियों के H-फलन का गुप्ता एवं मित्तल [4 p. 117] ने प्रदत्त किया तथा श्रीवास्तव एवं पंडा [5 p. 226 eq. (1.5) Seq.] ने निम्न प्रकार से प्रस्तुत किया है।

$$H[z_1, z_2] = H\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} H^{o,n_1;\, m_2,n_2;\, m_3,n_3}_{p_1,q_1;\, p_2,q_2;\, p_3,q_3}\left[\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} a_j;\, \alpha_j, A_j)_{1,p_1} : (c_j,\gamma_j)_{1,p_2};\, (e_j,E_j)_{1,p_3} \\ (b_j;\, \beta_j, B_j)_{1,q_1} : (d_j,\delta_j)_{1,q_2};\, (f_j,F_j)_{1,q_3} \end{matrix}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \phi_1(\xi,\eta)\, \theta_2(\xi)\, \theta_3(\eta)\, z_1^{\xi_1} z_2^{\xi_2}\, d\xi\, d\eta \qquad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi_1(\xi,\eta)=\frac{\prod_{j=n}^{n_1}\Gamma(1-a_j+\alpha_j\xi+A_j\eta)}{\prod_{j=n_1+1}^{p_1}\Gamma(a_j-\alpha_j\xi-A_j\eta)\prod_{j=1}^{q_1}\Gamma(1-b_j+\beta_j\xi+B_j\eta)} \quad (1.2)$$

$$\theta_2(\xi)=\frac{\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j\xi)\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-\delta_j\xi)}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j\xi)\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j\xi)} \quad (1.3)$$

$$\theta_3(\eta)=\frac{\prod_{j=1}^{n_3}\Gamma(1-e_j+E_j\eta)\prod_{j=1}^{m_3}\Gamma(f_j-F_j\eta)}{\prod_{j=n_3+1}^{p_3}\Gamma(e_j-E_j\eta)\prod_{j=m_3+1}^{q_3}\Gamma(1-f_j+F_j\eta)} \quad (1.4)$$

जबकि (1.1) में z_1 एवं z_2 शून्य के बराबर नहीं हैं, और रिक्त गुणनखंड को इकाई के रूप में प्रदर्शित किया गया है। p_i, q_i, n_i और m_i धनात्मक पूर्णांक है जैसे कि

$$p_i\geqslant n_i\geqslant o,\ q_j\geqslant o,\ q\geqslant m_i\geqslant o,\ (i=1,2,3,j=2,3)$$

आगे सभी $A's$, $\alpha's$, $B's$, $\beta's$, $\gamma's$, $E's$ और $F's$ संकेतों को धनात्मक राशियों के रूप में दिया गया है जिससे मानकीकरण में सुविधा रहे। संक्षिप्तता हेतु निम्नलिखित संक्षिप्तीकरणों का प्रयोग किया गया है।

$$R=\sum_{j=1}^{p_1}\alpha_j+\sum_{j=1}^{p_2}\gamma_j-\sum_{j=1}^{q_1}\beta_j-\sum_{j=1}^{q_2}\delta_j<o \quad (1.5)$$

$$S=\sum_{j=1}^{p_1}A_j+\sum_{j=1}^{p_3}E_j-\sum_{j=1}^{q_1}B_j-\sum_{j=1}^{q_3}F_j<o \quad (1.6)$$

$$U=-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}\alpha_j-\sum_{j=1}^{q_1}\beta_j+\sum_{j=1}^{m_2}\delta_j-\sum_{j=m_2+1}^{q_2}\delta_j+\sum_{j=1}^{n_2}\gamma_j-\sum_{j=n_2+1}^{p_2}\gamma_j>o \quad (1.7)$$

$$V=-\sum_{j=n_1+1}^{p_1}A_j-\sum_{j=1}^{q_1}B_j+\sum_{j=1}^{m_3}F_j-\sum_{j=m_3+1}^{q_2}f_j+\sum_{j=1}^{n_3}E_j-\sum_{j=n_3+1}^{p_3}E_j>o \quad (1.9)$$

$$|\arg z_1|<\tfrac{1}{2}u\,\pi \quad (1.9)$$

$$|\arg z_2| < \tfrac{1}{2}\nu\,\pi \tag{1.10}$$

$(\quad)_{1,p_1}$, $(\quad)_{1,p_2}$, $(\quad)_{1,p_3}$ और $(\quad)_{1,q}$, $(\quad)_{1,q_2}$, $(\quad)_{1,q_3}$ के प्राचलों के समुच्चयों के क्रमशः P_1, P_2, P_3, और Q_1, Q_2, Q_3 द्वारा प्रदर्शित किया गया है ।

इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित परिणामों का प्रयोग करेंगे ।

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\beta}\,P_n^{(\alpha,\beta)}\,(dx)$$

$$=\frac{(-1)^n\,2^{\rho+\beta+1}\,\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\rho-\alpha+1)\,\Gamma(\rho+1)}{n!\,\Gamma(\rho-\alpha-n+1)\,\Gamma(\rho+\beta+n+2)}\;{}_3F_2\left[\begin{matrix}-\lambda,\,\rho-\alpha+1,\,\rho+1;\,2\\ \rho-\alpha-n+1,\,\rho+\beta+n+2\end{matrix}\right] \tag{1.11}$$

और

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\sigma}\,P_n^{(\alpha,\beta)}\,(x)\,dx$$

$$=\frac{(-1)^n\,2^{\sigma+\alpha+1}\,\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\sigma-\beta+1)\,\Gamma(\sigma+1)}{n!\,\Gamma(\sigma-\beta-n+1)\,(\sigma+\alpha+n+2)}\;{}_3F_2\left[\begin{matrix}-\lambda,\,\sigma-\beta+1,\,\sigma+1:2\\ \sigma-\beta-n+1,\,\sigma+\alpha+n+2\end{matrix}\right] \tag{1.12}$$

2. इस अनुभाग में हम चार जैकोबी फलनों के गुणनफलन वाले समाकलनों से युक्त दो अचर राशियों के H-फलन का मूल्यांकन करेंगे । इन विख्यात परिणामों का प्रयोग हम $H[z_1, z_2]$ के विस्तार में करेंगे ।

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\,(1-x)^{\rho}\,(1+x)^{\beta}\,P^{(\alpha,\beta)}(x)\,H\left[\begin{matrix}z_1x^{\mu}\,(1-x)^{\delta}\\ z_2x^{\gamma}\,(1-x)^{\omega}\end{matrix}\right]dx$$

$$=\frac{(-1)^n\,2^{\rho+\beta+1}\,\Gamma(\beta+n+1)}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2^k}{k!}\;H^{o,n_1+3;\,m_2,n_2\,:\,m_3,n_3}_{p_1+3,q_1+3\,:\,p_2,q_2\,:\,p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix}z_1\,2^{\delta}\\ z_2\,2^{\omega}\end{matrix}\left|\begin{matrix}(-\lambda;\,\mu,\gamma),\,(\alpha-k-\rho;\,\delta,\omega)\,(-k-\rho;\,\delta,\omega)\,P_1;\,P_2:P_3\\ (k-\lambda;\,\mu,\gamma)\,(\alpha-n-\rho-k;\,\delta,\omega)\,(-1-\beta-n-k-\rho:\delta,\omega)\,Q_1;\,Q_2;\,Q_3\end{matrix}\right.\right] \tag{2.1}$$

समाकल (2.1) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है ।

प्रतिबन्ध μ, γ, δ और ω धनात्मक वास्तविक राशियाँ है एवं उनमें सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं ।

$$Re\,(\beta)>-1,\ |\arg z_1| < \tfrac{1}{2}\pi n,\ |\arg z_2| < \tfrac{1}{2}\pi\nu$$

$$Re\,[(\rho)+\ \delta_j\,(d_j/\delta_j)\ +\ \omega\,(f_j/F_j)\ +1]>o$$

$$1\leqslant j\leqslant m_2 \qquad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\ [(\lambda)+\mu\ (d_j/\delta_j)\ +\ \gamma\ (f_j/F_j)\ +1]>o$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\ (1-x)^{\rho}\ (1+x)\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) H\begin{bmatrix} z_1(1-x)^{\mu}/x^{\mu} \\ z_2(1-x)^{\mu}/x^{\mu} \end{bmatrix} dx = \frac{(1-)^n\ 2^{\rho+\beta+1}\ \Gamma(\beta+n+1)}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} H^{o,n_1+3;\ m_2,n_2\ :\ m_3,n_3}_{p_1+3,q_1+3;\ p_2,q_2\ :\ p_3,q_3}$$

$$\begin{bmatrix} z_1\ 2^{\mu} \\ z_2\ 2^{\mu} \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} (1+\lambda-k;\ \mu,\mu)\ (\alpha-\rho-k;\ \mu,\mu)\ (-\rho-k;\ \mu,\mu)\ P_1;\ P_2;\ P_3 \\ (11+\lambda;\ \mu,\mu)\ (\alpha+n-k-\rho;\ \mu,\mu)\ (-1-\rho-\beta-n-k;\ \mu,\mu)\ Q_1;\ Q_2;\ Q_3 \end{matrix}\right| \quad (22)$$

समाकलन (2.2) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध μ धनात्मक वास्तविक राशि है।

$$Re\ (\lambda)>-1,\ Re\ (\beta)>-1,\ |\arg z_1|<\tfrac{1}{2}u\ \pi;\ |\arg z_2|<\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\ [(\rho)+\ u\ (d_j/\delta_j)\ +\ u\ (f_j/F_j)\ +1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\ [(\lambda)-\ \mu\ (d_j/\delta_j)\ -\mu\ (f_j/F_j)\ +1]>o$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\ (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\sigma}\ P_n^{(\alpha,\beta)}\ (x) H\begin{bmatrix} z_1\ x^{\mu}\ (1+x)^{\delta} \\ z_2\ x^{\gamma}\ (1+x)^{\omega} \end{bmatrix} dx = \frac{(-1)^n\ 2^{\sigma+\alpha+1}\ \Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^k}{k!} H^{o,n_1+3;\ m_2,n_2;\ m_3,n_3}_{p_1+3,q+3;\ p_2,q_2;\ p_3,q_3}$$

$$\begin{bmatrix} z_1\ 2^{\delta} \\ z_2\ 2^{\omega} \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} (-\lambda;\ \mu,\rho)\ (\beta-\sigma-k;\ \delta,\omega)\ (-k-\sigma;\ \omega,\delta)\ P_1;\ P_2;\ P_3 \\ (k-\lambda;\ \mu,\gamma)\ (\beta+n-\sigma-k;\ \delta,\omega)\ (1-n-k-\alpha-\sigma;\ \delta,\omega)\ Q_1;\ Q_2;\ Q_3 \end{matrix}\right| \quad (2.3)$$

समाकलन (2.3) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध μ, γ, δ और ω धनात्मक वास्तविक राशियाँ हैं एवं उनमें से सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं।

$$Re\ (\alpha)>-1,\ |\arg z_1|\ z\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|\ z\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\ [(\lambda)+\ u\ (d_j/\delta_j)\ +\ \gamma\ (f_j/F_j)\ +1]>o$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\ [(\sigma+\delta)\ (d_j/\delta_j)+\omega\ (f_j/F_j)+1]>o$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$\int_{-1}^{1} x^{\lambda}\ (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\sigma}\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) H\left[\begin{matrix} z_1\ (1+x)^{\mu}/x^{\mu} \\ z_2\ (1+x)^{\mu}/x^{\mu}\end{matrix}\right] dx = \frac{(-1)^n\ 2^{\sigma+\alpha+1}\ \Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{k!} H^{o,n_1+3\ :\ m_2,n_2\ :\ m_3,n_3}_{p_1+3,q+3\ :\ p_2,q_2\ :\ p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix} z_1\ 2^{\mu} \\ z_2\ 2^{\mu}\end{matrix}\middle| \begin{matrix}(1+\lambda-k;\ \mu,\mu)\ (\beta-k-\sigma:\ \mu,\mu)\ (\sigma-k:\ \mu,\mu)\ P_1;\ P_3;\ P_3 \\ (1+\lambda;\ \mu,\mu)\ (\beta+n-k;\ \mu,\mu)\ (1-\sigma-\alpha-n-k;\ \mu,\mu)\ Q_1;\ Q_3;\ Q_3\end{matrix}\right] \quad (2.4)$$

समाकलन (2.4) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध μ धनात्मक वास्तविक राशि है।

$$Re\ (\lambda)>-1,\ Re\ (\alpha)>-1,\ |\arg z_1|\ z\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|<\tfrac{1}{2}v\pi$$
$$Re\ [(\sigma)+\ \mu(d_j/\delta_j)+\ \mu(f_j/F_j)\ +1]>o$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\ [(\sigma)-\ \mu\ (d_j/\delta_j-\ \mu\ (f_j/F_j)+1]>o$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

उपपत्ति

(2.1) को सिद्ध करने के लिये (1.1) के द्वारा दो अचर राशियों के H-फलन के वाम पक्ष को द्विमेलिन-बर्नीज कंटूर समाकलन के रूप में अभिव्यक्त करते हैं तथा समाकलन के क्रम को बदलते हैं। यह परिवर्तन कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है और परम अभिसारी है। हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{L_1}\int_{L_2} \phi_1\ (\xi.\eta)\ \theta_2\ (\xi)\ \theta_3\ (\eta)\ z_1^{\xi} z_2^{\eta}$$

$$\left\langle \int_{-1}^{1} x^{\lambda+\omega\xi+\gamma\eta}\ (1-x)^{\rho+\delta\xi+\omega\eta}\ (1+x)^{\beta}\ P^{(\alpha.\beta)}\ (x)\ dx\right\rangle d\xi\ d\eta \quad (2.5)$$

अब ज्ञात फल (1.11) की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मूल्यांकन करने के पश्चात् हमें निम्नलिखित फल प्राप्त होता है।

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int_{L_1}\int_{L_2}$$

$$\frac{(-1)^n\ 2^{\rho+\delta\xi+\omega\eta+\beta+1}\ \Gamma(\beta+\eta+1)\ \Gamma(\rho+\delta\xi+\omega\eta-\alpha+1)\ \Gamma(\rho+\delta\xi+\omega\eta+1)}{n!\ \Gamma(\rho+\delta\xi+\omega\eta-\alpha+n+1)\ \Gamma(\rho-\delta\xi+\omega\eta+\beta+n+2)}$$

$$ {}_3F_2\begin{bmatrix} -\lambda+\mu\xi+\gamma\eta,\ \rho+\delta\xi+\omega\eta-\alpha+1,\ \rho+\delta\xi+\omega\eta+1:2 \\ \rho+\delta\xi+\omega\eta-\alpha-n+1,\ \rho+\delta\xi+\omega\eta+n+\beta+2 \end{bmatrix} d\xi\ d\xi $$

अब हाइपरज्यामितीय फलन को श्रेणी के रूप में अभिव्यक्त करने पर और योग एवं समाकलन का क्रम बदलने पर [2 p. 176(75)] जो कि (2.1) में दिये गये वर्णित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध हैं। अन्त में दो अचर राशियों वाले H-फलन की परिभाषा (1.1) के सम्प्रयोग द्वारा (2.1) को प्राप्त करते हैं।

3. इस अनुभाग का उद्देश्य इसमें (2.1) से (2.4) वाले परिणामों का अनुप्रयोग कर उनको $H[z_1, z_2]$ के रूप में अभिव्यक्त करके चार विख्यात प्रसार सूत्रों की स्थापना करना है।

$$ x^{\lambda}(1-x)^{\rho} H\begin{bmatrix} z_1 x^{\mu}(1-x^{\delta} \\ z_2 x^{\gamma}(1-x^{\omega} \end{bmatrix} \tag{3.1} $$

$$ =2^{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(1+\alpha+\beta+r)(1+\alpha+\beta+2r)}{\Gamma(1+\alpha+r)}\cdot\frac{(-1)^k 2^k}{k!}P_r^{(\alpha\cdot\beta)}(x) $$

$$ H^{o,n_1+3;\ m_2,n_2;\ m_3,n_3}_{p_1+3,\ q_1+3;\ p,q_2,\ p_3\cdot q_3} $$

$$ \begin{bmatrix} z_1 2^{\delta} \\ z_2 2^{\omega} \end{bmatrix}\left|\begin{matrix} (-\lambda;\mu,\gamma)\ (-k-\rho;\delta,\omega)\ (-k-\rho-r;\delta,\omega)\ P_1;\ P_2;\ P_3 \\ (k-\lambda;\mu,\gamma)\ (r-\rho-k;\delta.\omega)\ (1-\alpha-\beta-r-k-\rho;\delta,\omega)\ Q_1;\ Q_2;\ Q_3 \end{matrix}\right] $$

विस्तार सूत्र (3.1) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध μ, γ, δ और ω धनात्मक वास्तविक राशियाँ हैं एवं उनमें से सभी शून्य से तुल्य नहीं हैं।

$$ S>0,\ R>0,\ Re(\beta)>-1,\ |\arg z_1|<\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|<\tfrac{1}{2}v\pi $$

$$ Re[(\lambda)+\mu(d_j/\delta_j)+\gamma(f_j/F_j)+1]>0 $$
$$ 1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3 $$

$$ Re[(\rho)+\delta(d_j/\delta_j)+\omega(f_j/F_j)+1]>0 $$
$$ 1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3 $$

$$ x^{\lambda}(1-x)^{\rho} H\begin{bmatrix} z_1(1-x)^{\mu}/x^{\mu} \\ z_2(1-x)^{\mu}/x^{\mu} \end{bmatrix} $$

$$ =2^{\rho}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(1+\alpha+\beta+r)(1+\alpha+\beta+2r)}{\Gamma(1+\alpha+r)}\frac{2^k}{k!}P_r^{(\alpha\cdot\beta)}(x) $$

$$H^{o,n_1+3\,:\,m_2,n_2;\,m_2,n_3}_{p_1+3\,:\,q_1+3\,:\,p_2,q_2;\,p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix}2^{\mu}\,z_1\\2^{\mu}\,z_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1+\lambda-k;\,\mu,\mu)\,(-\rho-k;\,\mu,\mu)\,(-\rho-\alpha-k;\,\mu,\mu)\,P_1;\,P_2;\,P_3\\(1+\lambda;\,\mu,\mu)\,(r-k-\rho;\,\mu,\mu)\,(1-\rho-\alpha-\beta-r-k;\,\mu,\mu)Q_1;\,Q_2;\,Q_3\end{matrix}\right] \quad (3.2)$$

विस्तार सूत्र (3.2) निम्नलिखित प्रबिन्ध के अन्तर्गत वैध है।

प्रतिबन्ध μ वास्तविक धनात्मक राशि है।

$$S>0,\ R>0,\ Re\,(\lambda)>-1,\ Re\,(\beta)>-1,\ |\arg z_1|>\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|>\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\,[(\rho)+\mu\,(d_j/\delta_j)+\mu\,(f_j/F_j)+1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\,[(\lambda)-\mu\,(d_j/\delta_j)-\mu\,(f_j/F_j)+1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$x^{\lambda}\,(1+x)^{\sigma}\,H\,[z_1x^{\mu}\,(1+x)^{\delta},\,z_2x^{\gamma}\,(1+x)^{\omega}]$$

$$=2^{\sigma}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\,\Gamma(1+\alpha+\beta+r)\,(1+\alpha+\beta+2r)}{\Gamma(1+\beta+\gamma)}\frac{(-1)^k2^k}{k!}P_r^{(\alpha,\beta)}(x)$$

$$H^{o,n_1+\cdot\,:\,m_2,n_2\,:\,m_3,n_3}_{p_1+3,q_1+3\,:\,p_2,q_2\,:\,p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix}2^{\delta}\,z_1\\2^{\omega}\,z_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(-\lambda;\,\mu,\gamma)\,(\sigma-k;\,\delta,\omega)\,(-k-\sigma-\beta;\,\omega,\delta)\,P_1;\,P_2;\,P_3\\(k-\lambda;\,\mu,\gamma)\,(r-\sigma-k;\,\delta,\omega)\,(-1-r-k-\alpha-\beta-\sigma;\,\delta,\omega)\,Q_1;\,Q_2;\,Q_3\end{matrix}\right] \quad (3.3)$$

विस्तार सूत्र (3.3) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैद्य है।

प्रतिबन्ध μ, δ, γ और ω घनात्मक वास्तविक राशियाँ हैं एवं सभी शून्य के तुल्य नहीं हैं

$$S>0,\ R>0,\ Re\,(\beta)>-1,\ |\arg z_1|<\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|<\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\,[(\lambda)+\mu\,(d_j/\delta_j)+\gamma\,(f_j/F_j)+1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\,[\sigma+\delta\,(d_j/\delta_j)+\omega\,(f_j/F_j)+1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$x^{\lambda}\,(1+x)^{\sigma}\,H\begin{bmatrix}z_1\,(1+x)^{\mu}/x^{\mu}\\z_2\,(1+x)^{\mu}/x^{\mu}\end{bmatrix}$$

$$=2^{\sigma}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+\beta+r)\,(1+\alpha+\beta+2r)}{\Gamma(1+\beta+r)}P_r^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{2k}{k!}$$

$$H^{o,n_1+3\,:\,m_2,n_2\,:\,m_3n_3}_{p_1+3,\,p_1+3\,:\,p_2,q_2\,:\,p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix}2^{\mu}\,z_2\\ 2^{\mu}\,z_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1+\lambda-k:\mu,\mu)\,(-k-\sigma:\mu,\mu)\,(-\sigma-\beta-k:\mu,\mu)\,P_1;\,P_2;\,P_3\\ (1+\lambda:\mu,\mu)\,(s-\sigma-k\,;\,\mu,\mu)\,(-1-\sigma-\beta-\alpha-r:\mu,\mu)\,Q_1;\,Q_2;\,Q_3\end{matrix}\right] \qquad (3.4)$$

विस्तार सूत्र (3.4) निम्नलिखित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत वैध है।

$$S>0,\ Re\,(\beta)>-1,\ |\arg z_1|<\tfrac{1}{2}u\pi,\ |\arg z_2|<\tfrac{1}{2}v\pi$$

$$Re\,[(\lambda)-\mu\,(d_j/\delta_j)-\mu\,(f_j/F_j)+1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

$$Re\,[(\sigma)+\mu\,(d_j/\delta j)+\mu\,(f_j/F_j)+1]>0$$
$$1\leqslant j\leqslant m_2 \quad 1\leqslant j\leqslant m_3$$

उपपत्ति

(3.1) का मान ज्ञात करने के लिये माना कि

$$x^{\lambda}\,(1-x)^{\rho}\,H\left[\begin{matrix}z_1\,x^{\mu}\,(1-x)^{\delta}\\ z_2\,x^{\gamma}\,(1-x)^{\omega}\end{matrix}\right]=\sum_{r=0}^{\infty}M_r\,P_r^{(\alpha,\beta)}(x)$$

जहाँ M_r अचर है जिसे ज्ञात करना है। ऐसा करने के लिये हम (3.5) के दोनों पक्षों में $(1-x)^{\alpha}\,(1+x)^{\beta}\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ से गुणा करते हैं और फिर -1 से $+1$ सीमाओं के भीतर समाकलित करते हैं। अन्त में वाम पक्ष में परिणाम (2.1) के पुनःविचार तथा दक्षिण पक्ष में जैकोबी बहुपदों के लाम्बिकता गुण के प्रयोग करने से वांछित परिणाम प्राप्त होता है।

$$M_n=\frac{(-1)^n\,2^{\rho}\,\Sigma(1+\alpha+\beta+n)(1+\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(1+\beta+r)}\,P_r^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{2k}{k!}$$

$$H^{o,n_1+3;\,m_2,n_2;\,m_3,n_3}_{p_1+3,\,q_1+3;\,p_2,q_2\,;\,p_3,q_3}$$

$$\left[\begin{matrix}2^{\mu}\,z_1\\ 2^{\mu}\,z_2\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(-\lambda;\,\mu+\gamma)\,(-k-\rho;\,\delta,\omega)\,(-k-\rho-\alpha;\,\delta,\omega)_{1,p_1}\\ 1,\rho_1\,(k-\lambda;\,\mu,\gamma)\,(n-\rho-\alpha;\,\delta,\omega)\,(-1-\alpha-\beta-n-k-\rho;\,\delta,\omega)\end{matrix}\right] \qquad (3.5)$$

M_n का मान (3.6) से प्राप्त कर (3.5) में रखने पर हमें विस्तार सूत्र (3.1) प्राप्त होता है। इसी प्रकार अन्य परिणामों को ज्ञात कर सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

सहाय्य एवं निर्देश के लिये लेखक डा० अनन्दानी के प्रति आभार व्यक्त करता है जिन्होंने इस प्रपत्र के लेखन में सहयता पहुँचायी है।

निर्देश

1. अनन्दानी, पी० तथा सिंह, नाम प्रसाद, Comment. Math. Univ. St. Pauli 1979, **28**, 163-167.

2. कारसलॉ, एच० एस०, Introduction to the Theory of Fourier Series and Integrals, डोबर पब्लिकेशन, न्यूयार्क, 1950.

3. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि, Tables of Integral Transforms, भाग 2, मैकग्राहिल, न्यूयार्क 1954.

4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता ,के० सी०, Proc. Indian Acad. Sci. (1972) Sect. A 75 117-123.

5. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा, आर० J. Reine Angew. Math., 1976, 283-284, 265-274.

6. वर्मा, आर० सी०, पी० एच० डी० थीसिस, जबलपुर विश्वविद्यालय, 1966.

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr Sheo Gopal Misra,
M. Sc.. Di Phil., F. N. A. Sc.

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 12 रु० या 8 पौंड या 32 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 3 रु० 2 पौंड या 8 डालर

Rates
Annual Rs. 12 *or* 8 £ *or* $ 32
Per Vol. Rs. 3 *or* 2 £ *or* $ 8

Vijnana Parishad
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211002
India

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्,
महर्षि दयानन्द मार्ग,
इलाहाबाद-2

मुद्रक : प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली ऐवेन्यू,
इलाहाबाद